2026

ملزمة

الرياضيات

للصف الثالث المتوسط

وفق المنهج الجديد

الجزء الاول

Math

إعداد و ترتيب

الأستاذ رشيد عبد الله اللهيبي

07736957649

الفصل الاول: العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

الدرس [1-1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

[1 – 1 – 1]	استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية

الحالة الأولى: اذا كان المقدار بالصورة $(a+b)(a-b)$ يتم التبسيط بطريقتين:

1) توزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم جمع أو طرح الحدود المتشابهة .

2) القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

الحالة الثانية : فتح الأقواس باستخدام خاصية التوزيع ((الضرب على الجمع أو الطرح))

1) وضع الجذور بأبسط صورة باستخدام طريقة التحليل أو عوامل العدد بشرط أن يكون أحد العوامل مربع كامل.

2) فتح الاقواس بخاصية التوزيع وخواص ضرب الجذور .

3) اذا كان السؤال يحتوي على جذور فيمكن تبسيطها مرة أخرى .

الحالة الثالثة : الجمل العددية التي تحتوي على القسمة أو الضرب :

1) في حالة الضرب وضع الأعداد الحقيقية (الجذور) في ابسط صورة ثم نجري عمليات الاختصارات أن وجدت.

2) نجري عمليات الضرب ((البسط × البسط والمقام × المقام)) .

3) في حالة القسمة نقلب القسمة الى ضرب وقلب الكسر الذي بعد القسمة .

ت	خواص الجذور التربيعية	ت	خواص الجذور التكعيبية	
1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	1	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{216} = 6$
2	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b > 0$	2	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $b > 0$	
3	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$	3	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$	
4	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	4	$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$	
		5	$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$	

اليك شرح الجدول السابق بالتفصيل

أولا | الجمع والطرح

$= \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

لا يمكن الجمع والطرح بين الاعداد الغير نسبيه الغير متشابه.

فيكون اما بتبسيط احدهم وجعله مشابه للأخر عن طريق التحليل

$= \sqrt{a} \pm \sqrt{a}$

اما هنا تستطيع وبسهولة اجراء الجمع والطرح لان تحت الجذور متشابه

ثانيا | الضرب

يمكن اجراء عملية الضرب بين الجذور الاعداد الغير متشابه بضربها مباشر

$= \sqrt{a * b}\sqrt{a} * \sqrt{b}$

يمكن استخراج العدد من تحت الجذور في حال كون العدد الذي تحت الجذر متشابه

$= a\sqrt{a} * \sqrt{a}$

ملاحظة :

اذا كان الجذر تربيعي فيضرب في نفسه مرتين حتى يتم استخراجه والتكعيبي ثلاث مرات والجذر الرابع اربع مرات .....الخ

اذا كان الجذر تربيعي مرفوع الى اس تربيع التربيع يلغي الجذر

$= a \quad (\sqrt{a})^2$

اذا كان الجذر تكعيبي مرفوع الى اس تكعيب التكعيبي يلغي الجذر التكعيبي

$= a \quad (\sqrt[3]{a})^3$

خاصية توزيع الجذر

توزيع الجذر الى البسط والمقام وتنطبق الملاحظة أيضا" على الجذور التكعيبية .

$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{a}{b}}$

خاصية تحويل الجذر الى اس او بالعكس .

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

مثال : جد سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر .

الحل : قانون حساب سرعة التسونامي حيث d تمثل عمق المياه

سرعة التسونامي التقريبية $\quad v = \sqrt{9.6d} = \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \approx 98 \ m/sec$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

$$1)\ (\sqrt{12} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{18}) = (\sqrt{12})^2 - (\sqrt{18})^2 = 12 - 18 = -6$$

$$2)\ \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = -1$$

2023 /دور3

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$1)\ \sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8})-6 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2\sqrt{2})-6$$
$$= 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}-6$$
$$= 6-4\sqrt{6}-6 = -4\sqrt{6} = -4\times 2.4 = -9.6$$

2	8
2	4
2	2
$2\sqrt{2}$	1

2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{3}$	1

$$2)\ (-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right) = \sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)$$
$$= -3\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)$$
$$= -3\times\frac{1}{9}\sqrt{7}+3\times\frac{2}{9}\sqrt{7} =$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$$
$$= \frac{1}{3}\times 2.6 = \frac{2.6}{3} = 0.86 \approx 0.9$$

2	28
2	14
7	7
$2\sqrt{7}$	1

تنسيب المقام

اذا كان المقام يحتوي على جذر فيجب التخلص منه هنالك حالتان :

1) اذا كان المقام يتكون من حد واحد نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام . أي أن :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

2) اذا كان المقام يتكون من حدين (مقدار جبري) نقوم بضرب البسط والمقام بمرافق المقام (نفس المقدار لكن عكس اشارة الحد الوسط) .

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

$$1)\ \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}-5}{5}$$

$$2)\ \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}+\sqrt{7}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{12-7}$$
$$= \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$$

[1 – 1 – 2]	استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط الجمل العددية

خواص الأسس :

1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ عند الضرب نجمع الاسس بشرط ان يكون الاساس متشابه	2	$(a^n)^m = a^{nm}$ عند رف اس الى اس اخر يتحول الى ضرب	3	$(a.b)^n = a^n . b^n$ الاس يتوزع للعدين الذي بينهما عملية ضرب	4	$a^0 = 1$ اي عدد اسه صفر يساوي 1
5	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ اي عدد اسه سالب في البسط هو موجب في المقام	6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ عند القسمة نطرح الاسس بشرط تشابه الاساس	7	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ الاس يتوزع للبسط والمقام		

1. الخاصية الأولى هي عند الضرب تجمع الأسس مع مراعات الإشارة والاساس متشابه ينزل كما هو ولا يضرب
2. عندما يكون الرقم مرفوع الى اس والرقم والاس مرفوعين الى اس الاسس تضرب
3. اذا كان الاس لقوس والعملية ضرب فيوزع على عناصر القوس
4. عند ما يكون اس أي رقم صفر الناتج هو واحد
5. اذا كان الاس سالب يجب ان نتخلص منه بجعلة في المقام
6. اذا كان الاس في المقام ورفعناه الى البسط يجب تغير الإشارة
7. اذا كان الاس لقوس فيوزع على عناصر القوس(بسط ومقام)

مثال : أحسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين اذا لم يكن عددا صحيحا :

1) $9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0.037 \approx 0.04$

2) $(\sqrt{7})^2 = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 7$

3) $2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414 \approx 1.41$

4) $5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{2-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4-3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2.236 \approx 2.24$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = 0.36 - 2.83 = -2.47$

6) $8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{2+\frac{1}{2}} = 2 - 1 + 3^{\frac{4+1}{2}} = 1 + 3^{\frac{5}{2}} = 1 + \sqrt{3^5}$

$= 1 + \sqrt{243} \approx 1 + 15.588 = 16.588 = 16.59$

مثال : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

1) $7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = (7.6 - 4.135) \times 10^{-4}$

$= 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$

2) $0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = (5.2 + 7.13) \times 10^2$

$= 12.33 \times 10^2$

3) $(7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 61.31 \times 10^{-10}$

4) $4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} = 8.836 \times 10^{-3}$

تأكد من فهمك

مثال : بسط الجمل العددية الأتية :

[1] $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$

[2] $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = \sqrt{7} \times \sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{7} + \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

$= 7 - \sqrt{14} - \sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$

2023 /دور2

[3] $(\sqrt{125} - \sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right) = (5\sqrt{5} - 2\sqrt{5})\left(\frac{2}{3}\right) = 3\sqrt{5} \times \frac{2}{3}$

2022 /دور1

$= 2\sqrt{5}$

2	02
2	01
5	5
$2\sqrt{5}$	1

5	125
5	25
5	5
$5\sqrt{5}$	1

[4] $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{5(-3)} \div \frac{2 \times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{-15} \div \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{8\sqrt{3}}{-15} \div \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{-15} \times \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{-4}{15}$

2	8
2	4
2	2
$2\sqrt{2}$	1

2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{3}$	1

2	42
2	21
2	6
3	3
$2\sqrt{5}$	1

مثال : بسط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عشر :

[1] $\sqrt{7}(\sqrt{28} - \sqrt{2}) - 5 = \sqrt{7}(2\sqrt{7} - \sqrt{2}) - 5 = \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{2} - 5$

2	82
2	41
7	1
$2\sqrt{7}$	

$$= 14 - \sqrt{14} - 5 = 9 - \sqrt{14} = 9 - 3.74$$
$$= 5.26 \approx 5.3$$

[2] $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{12}\right) = \sqrt[3]{-125}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{4} \times 2\sqrt{3}\right)$

$$= -5\left(\frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$= -5 \times \frac{1}{10}\sqrt{3} + 5 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{-1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 2 \times 1.73 = 3.46$$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد :

2023/ تمهيدي

[1] $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3} - 3}{12}$

[2] $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(1-2\sqrt{5})}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times 1 - \sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5}$

$$= \frac{\sqrt{5} - 10}{5}$$

2 |	02
2 |	01
5 |	5
$2\sqrt{5}$ |	1

[3] $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} == \frac{\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}(10-\sqrt{6})}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$$= \frac{\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6} \times 10 - \sqrt{6} \times \sqrt{6}}{12}$$

$$= \frac{5\sqrt{6} - 3}{6} - \frac{10\sqrt{6} - 6}{12} = \frac{10\sqrt{6} - 6 - 10\sqrt{6} + 6}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

مهم

مثال : استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين مستعملا الحاسبة لكل مما يأتي :

[1] $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \sqrt{3^3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \sqrt{27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - 3\sqrt{3}$

$$= 0.111 + 0.037 - 3(1.73)$$
$$= 0.148 - 5.19 = -5.042 \approx -5.04$$

2 |	50
5 |	25
5 |	5
$5\sqrt{2}$ |	1

[2] $27^{\frac{1}{2}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} - 1 + 9 \times \sqrt{5} == 3\sqrt{3} - 1 + 9 \times 2.236$

$$= 3 \times 1.73 - 1 + 20.124$$
$$= 5.19 - 1 + 20.124 = 24.314 \approx 24.31$$

مثال : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[1] $6.43\times10^{-5}-0.25\times10^{-4}=0.643\times10^{-4}-0.25\times10^{-4}=(0.643-0.25)\times10^{-4}$
$=0.393\times10^{-4}\approx0.39\times10^{-4}$

[2] $(9.23\times10^{-3})^2=9.23\times10^{-3}\times9.23\times10^{-3}=85.192\times10^{-6}\approx85.19\times10^{-6}$

تدريب وحل التمرينات

مثال : بسط الجمل العددية الآتية :

[1] $(\sqrt{18}-\sqrt{50})\left(\frac{-27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=(3\sqrt{2}-5\sqrt{2})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}\right)=-2\sqrt{2}\times\frac{-3}{4}=\frac{6\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

[2] $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}}\div\frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\times5}\div\frac{5\times2}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{15}\div\frac{10}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{15}\times\frac{5}{10}=\frac{\sqrt{3}}{15}$

2024/ دور 3

مثال : بسط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$7\sqrt{\frac{2}{49}}-3\sqrt{\frac{8}{81}}+\sqrt{\frac{18}{36}}=7\times\frac{\sqrt{2}}{7}-3\times\frac{\sqrt{8}}{9}+\frac{\sqrt{18}}{6}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$
$=\frac{5\times1.41}{6}=\frac{7.05}{6}=1.17\approx1.2$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد

[1] $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-3\sqrt{5})-3\sqrt{5}(\sqrt{7}-3\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2}$
$=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times3\sqrt{5}-3\sqrt{5}\times\sqrt{7}+3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}{7-45}$
$=\frac{7-3\sqrt{35}-3\sqrt{35}+45}{-38}=\frac{52-6\sqrt{35}}{-38}=\frac{-52+6\sqrt{35}}{38}$

[2] $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}}-\frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}}-\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$
$=\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}}\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}-\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=\frac{(\sqrt{33}-\sqrt{11})\sqrt{11}}{3\sqrt{11}\times\sqrt{11}}-\frac{(2\sqrt{15}-\sqrt{5})\sqrt{15}}{5\sqrt{15}\times\sqrt{15}}$
$=\frac{\sqrt{33}\times\sqrt{11}-\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{3\times11}-\frac{2\sqrt{15}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{15}}{5\times15}$
$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\sqrt{11}-11}{33}-\frac{2\times15-\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{75}=\frac{11\sqrt{3}-11}{33}-\frac{30-5\sqrt{3}}{75}$

$$\frac{11(\sqrt{3}-1)}{33}-\frac{5(6-\sqrt{3})}{75}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{3}-\frac{(6-\sqrt{3})}{15}=\frac{5(\sqrt{3}-1)-(6-\sqrt{3})}{15}$$

$$\frac{5\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{15}=\frac{-11-6\sqrt{3}}{15}$$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال :

لأقمار الصناعية : يستعمل القمر الصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير اذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية : $v=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}$ m/sec اذ r نصف قطر المدار (بعد القمر عن مركز الأرض) . ما سرعة القمر اذا كان نصف قطر المدار 300km ؟

الحل : نحول نصف القطر من km الى m

$$r=300km=300\times1000=3\times10^5m$$

$$V=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{3\times10^5}}=\sqrt{\frac{4\times10^{14-5}}{3}}=\frac{2\times\sqrt{10^9}}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10^8}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{10}\times10^4}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}\times10^4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{30}\times10^4}{3}=\frac{2\times5.47\times10^4}{3}=\frac{10.94\times10^4}{3}=3.65\times10^4$$

سؤال :

مكافحة الحرائق : تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون : $V=\sqrt{2hg}$ foot/sec اذ h تمثل أقصى ارتفاع للماء و g يمثل سرعة التعجيل الأرضي $(32\ foo/sec^2)$ لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني الى مضخة لتضخ الماء الى ارتفاع 80 foot فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec

الحل :

V : السرعة . أقصى ارتفاع $h=80$ foot . *التعجيل الأرضي* $g=32\ foo/sec^2$

بتربيع الطرفين $V=\sqrt{2hg}\Rightarrow72=\sqrt{2\times h\times32}\Rightarrow\Rightarrow72=\sqrt{64\times h}$

$$5184=64\times h$$

$$h=\frac{5184}{64}=81\Rightarrow$$ نعم : مضخة الماء تفي بالحاجة

مساحة المثلث $=\frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الأرتفاع

سؤال :

هندسة : جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت اذا كان ارتفاعه $\sqrt{18}-\sqrt{3}$ m وطول قاعدته $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ m

الحل :

2019/ دور 1

مساحة المثلث $=\frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الأرتفاع

$$A=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{18}-\sqrt{3})=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{3})$$
$$=\frac{1}{2}\left[(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\right]=\frac{1}{2}(18-3)=\frac{1}{2}\times 15=7.5\ m^2$$

فكر

سؤال : أثبت صحة ما يأتي :

$$\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=2$$

الحل :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$H.S=\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3=7-5=2 \quad R.H.S$$

سؤال : أصحح الخطأ : كتب شاكر ناتج جمع العددين كالآتي :

$8.4\times10^{-3}+0.25\times10^{-2}=4.368\times10^{-3}$ حدد خطأ شاكر وصححه .

الحل :

$$8.4\times10^{-3}+0.25\times10^{-2}=8.4\times10^{-3}+2.5\times10^{-3}=(8.4+2.5)\times10^{-3}=10.9\times10^{-3}$$

سؤال : حس عددي : هل أن العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

الحل:

5	125
5	25
5	5
	1
$5\sqrt{5}$	

$$\sqrt{125}=5\sqrt{5}=5\times2.23=11.15$$

نعم العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

سؤال : أكتب // ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عشر : $6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}$

الحل :

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1
$6\sqrt{6}$	

5	125
5	25
5	5
	1
$5\sqrt{5}$	

$$6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{6^3}+\sqrt{5^3}=\sqrt{216}+\sqrt{125}$$
$$=6\sqrt{6}+5\sqrt{5}=6\times2.44+5\times2.23$$
$$=14.64+11.15=25.79\approx25.8$$

مراجعة الفصل

تدريب (1) : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{5+\sqrt{10}+\sqrt{10}+2}{5-2}$$

$$=\frac{7+2\sqrt{10}}{3}=\frac{7+2(3.16)}{3}=\frac{7+6.32}{3}=\frac{13.32}{3}=4.44\approx 4.4$$

تدريب (2) : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$$6.25\times10^3\div0.05\times10^6=(6.25\div0.05)\times10^{3-6}=125\times10^{-3}=0.125\times10^{12}\approx0.13\times10^{12}$$

مثال 1 : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$(-8)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{18}\right)=\sqrt[3]{-8}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\right)=-2\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=-2\times\frac{1}{4}\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{-1}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{2}\times1.41=\frac{4.23}{2}\approx2.11=2.1$$

مثال 2 : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$$0.016\times10^4+1.957\times10^3=0.16\times10^3+1.957\times10^3=(0.16+1.957)\times10^3=2.117\times10^3$$
$$\approx2.12\times10^3$$

اختبار الفصل

سؤال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية :

[1] $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{5}=3+\sqrt{15}+\sqrt{15}+5$

$$=8+2\sqrt{15}$$

[2] $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{2}-5\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$$=\frac{3-\sqrt{18}}{3}-\frac{\sqrt{16}-5\sqrt{2}}{6}=\frac{3-3\sqrt{2}}{3}-\frac{4-5\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{6 - 6\sqrt{2} - 4 + 5\sqrt{2}}{6} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$$

سؤال : استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب كل مما يلي مقرباً لأقرب عشر :

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{0} + (121)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} - 1 + \sqrt{121} \times \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{5} - 1 + \frac{11}{3}$$
$$= 0.2 - 1 + 3.66 \approx 2.86 \approx 2.9$$

الاختيار من متعدد

سؤال : أختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

[1] $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = \cdots\cdots$

a) $2 + 9\sqrt{7}$ b) $2 + 9\sqrt{2}$
c) $9 + 2\sqrt{14}$ d) $2 + 9\sqrt{14}$

الحل :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$$
$$= 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{7} + 7$$
$$= 9 + 2\sqrt{14}$$

الجواب فرع : (c)

[2] $(\sqrt{18} - \sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right) = \cdots\cdots$

a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$

الحل :

$$(\sqrt{18} - \sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right) = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\left(\frac{-3}{5}\right)$$
$$= (\sqrt{2})\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{5}$$

الجواب فرع : (d)

سؤال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

2019/ تمهيدي

[3] $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \cdots\cdots$

a) $\frac{-5}{2}$ b) $\frac{-2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

الحل :

$$\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \frac{6 \times 5\sqrt{2}}{3(-2)} \div \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{-2} \div 2\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-5}{2}$$

الجواب فرع : (a)

[4] $\sqrt{8}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = \cdots\cdots$

a) $5 - 4\sqrt{6}$ b) $5 + 4\sqrt{6}$

c) $4 - 5\sqrt{6}$ d) $4 + 5\sqrt{6}$

الحل :

$$\sqrt{8}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3\sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} - 3\sqrt{6}$$

$$= 4 - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 4 - 5\sqrt{6}$$

الجواب فرع : (c)

[5] $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}\right) = \cdots\cdots$

a) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

الحل :

$$(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}\right)$$

$$= \sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4} \times 4\sqrt{2}\right)$$

$$= -3\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) = 3 \times \frac{1}{6}\sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} =$$

$$= \frac{-1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}$$

الجواب فرع : (b)

2019

[6] $\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \cdots\cdots$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ c) 1 d) -1

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} \times \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{1(\sqrt{5} + 1) - \sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{5} + 1 \times 1 - \sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times 1}{5 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1 - 5 - \sqrt{5}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

الجواب فرع : (d)

[7] $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \cdots\cdots$ a) $5+6\sqrt{2}$ b) $5-6\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6}-5$ d) $2\sqrt{6}+5$

الحل :

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{6}+3}{2-3} = \frac{5-2\sqrt{6}}{-1}$$

$$= -5+2\sqrt{6}$$

الجواب فرع : (c)

واجب

(1) $(\sqrt{50}-\sqrt{8})\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$

(2) $\frac{6\sqrt{44}}{\sqrt{5}} \div \frac{18\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

(3) $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{25}$

(4) $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

سؤال : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[8] $\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \cdots\cdots$

a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 d) -11.18

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{9} - \frac{1}{3^2} - \sqrt{(5)^3}$$

$$\approx \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \sqrt{125} \approx -5\sqrt{5} \approx -5(2.236)$$

$$\approx -11.18$$

الجواب فرع : (d)

[9] $8^{-\frac{1}{3}} - (-7)^0 + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx \cdots\cdots$

a) -0.16 b) -0.17 c) 0.16 d) 0.17

الحل :

$$8^{-\frac{1}{3}} - (-7)^0 + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} - 1 + \frac{1}{6} \times \sqrt{4}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - 1 + \frac{1}{6} \times 2 \approx \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3}$$

$$\approx 0.5 - 1 + 0.333 \approx -0.167 \approx -0.17$$

الجواب فرع : (b)

سؤال : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[10] $(7.46 \times 10^{-2})^2 \approx \cdots\cdots$

a) 5.56×10^{-5} b) 5.57×10^{-4} c) 5.56×10^{-4} d) 5.57×10^{-5}

الحل :

$$(7.46 \times 10^{-2})^2 = 7.46 \times 10^{-2} \times 7.46 \times 10^{-2}$$

$$= (7.46 \times 7.46) \times 10^{-4} = 55.65 \times 10^{-4}$$

$$= 5.565 \times 10^{-5} \approx 5.57 \times 10^{-5}$$

الجواب فرع : (d)

الدرس [2 – 1] : التطبيقات

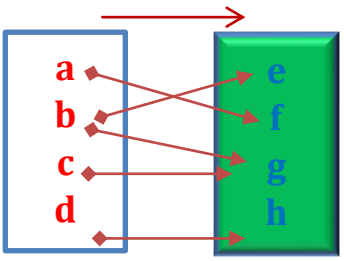
[1 – 2 – 1]	التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي

التطبيق (Mappings) : لتكن R علاقة من المجموعة X (المجال) الى المجموعة Y (المجال المقابل) حيث كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر وحيد من عناصر Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق وتكتب $R : X \longrightarrow Y$.

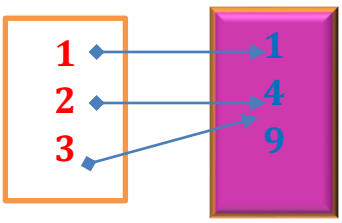
الزوج المرتب (ordered pair) : هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) اذ ينتمي المسقط الأول ((الإحداثي الأول)) الى المجموعة X والمسقط الثاني ((الإحداثي الثاني)) الى المجموعة Y من حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$

المدى (Rang) : يمثل المدى المسقط الثاني من الأزواج المرتبة (x, y) أي تمثل صور عناصر المجال ((النواتج))

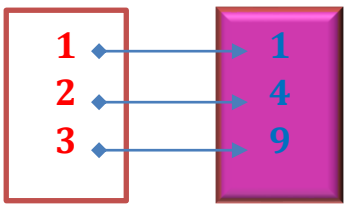
فيما يلي أمثلة توضح متى تكون العلاقة تطبيق :



لا يمثل تطبيق لأن العنصر R
b في المجال ارتبط بعنصرين في المجال المقابل



يمثل تطبيق لأن كل عنصر R
من X يرتبط بعنصر واحد من Y



يمثل تطبيق لأن كل عنصر R
من X يرتبط بعنصر واحد من Y

هنا هذا السهم الذي يربط بين المجموعتين يسمى قاعدة الاقتران . ويكون الناتج . X قاعدة الاقتران عبارة عن معادلة ندخل فيها عناصر المجموعة

.. وهذى الناتج يسمى المدى. Y هو الذي يرتبط به السهم في المجموعة

2023/ تمهيدى

مثال : اذا كانت $R : X \to Y$ تمثل تطبيقا بقاعدة اقتران $y = \frac{1}{2}x$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ المجموعة Y

$\{2, 3, 4, 5\}$. اكتب التطبيق على شكل أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق .

الحل :

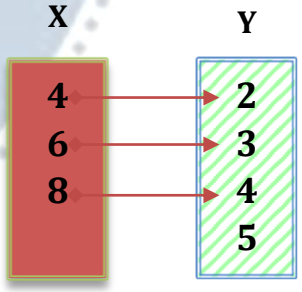
$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad X = \{4, 6, 8\}$

$y = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$y = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

أولا" وضع قاعدة الاقتران ثانيا" التعويض بدل كل X الأرقام الموجودة في المجموعة X الناتج يمثل المدى والازواج المرتبة هي عبارة عن المدخلات في قاعدة الاقتران والمخرجات

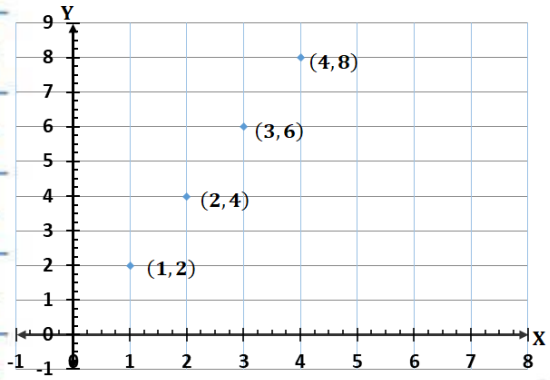


$R = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$ الأزواج المرتبة $\Rightarrow$ $X = \{4, 6, 8\}$ المجال $\Rightarrow$ $\{2, 3, 4\}$ = المدى

مثال : الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك هل تمثل العلاقة تطبيقا ؟ اذا كانت تطبيقا فاكتب قاعدة الاقتران وحدد المجال والمدى ومثله في المستوي الإحداثي .

الوزن / كغم X	السعر بألوف الدنانير Y
1	2
2	4
3	6
4	8

الحل :



قاعدة الأقتران : $y = 2x$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= \{2, 4, 6, 8\}$

[1 – 2 – 2]	أنواع التطبيقات

اولا : التطبيق الشامل | غير الشامل

التطبيق الشامل	التطبيق غير الشامل
يكون التطبيق $f : X \to Y$ شامل اذا كان المدى = المجال المقابل	يكون التطبيق $f : X \to Y$ غير شامل اذا كان المجال المقابل N, Z, R, Q

ثانيا : التطبيق المتباين | غير المتباين

التطبيق المتباين	التطبيق غير المتباين
يكون التطبيق $f: X \to Y$ متباين اذا كان كل عنصر في X يرتبط بعنصر واحد من Y أي أن : $\forall x_1, x_2 \in X \ , x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ ((النواتج مختلفة))	يكون التطبيق $f: X \to Y$ غير متباين اذا كان : $\forall x_1, x_2 \in X \ , x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) = f(x_2)$ ((النواتج متشابهة))

ثالثا : التطبيق المتقابل

يكون التطبيق تقابل اذا كان التطبيق شامل ومتباين

سؤال : اذا كانت : $f : Z \to Z$ حيث : $f(x) = 2x^2 - 3$ بين نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة .

الحل :

$f(x) = 2x^2 - 3$, $X = Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\ldots\}$

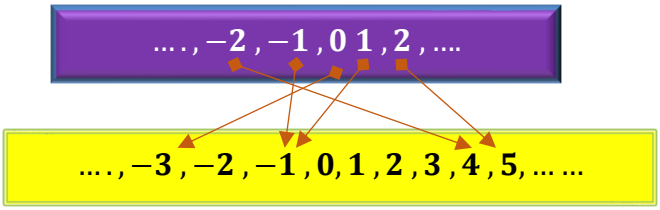
$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$



المدى $= \{-3 , -1 , 5 , \ldots\ldots\ldots\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل Z

التطبيق ليس متباينا لأن $f(1) = f(-1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

أي ان عوضنا 1 والسالب واحد والناتج هو نفسه -1
وهذا يخالف شرط التطبيق المتباين

تركيب التطبيقات

1	$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$	2	$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$f[g(x)]$ الدالة تقرأ f تركيب g بالنسبة لل x

$g[f(x)]$ الدالة تقرأ g تركيب f بالنسبة لل x

سؤال : اذا كان : $f : N \to N$ حيث : $f(x) = 2x + 1$ و $g : N \to N$ حيث : $g(x) = x^2$ جد :

1) $(f \circ g)(3)$ 2) $(g \circ f)(x)$ وماذا تلاحظ ؟ 3) جد قيمة x اذا كان : $(f \circ g)(x) = 33$

الحل :

1) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f[(3)^2] = f(9) = 2(9) + 1 = 19$

2) $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g[2(3) + 1] = g(7) = (7)^2 \implies (f \circ g)(3) \neq (g \circ f)(3)$

3) $(f \circ g)(x) = 33$

$f[g(x)] = 33 \implies f(x^2) = 33 \implies 2x^2 + 1 = 33$

$2x^2 = 33 - 1 \implies 2x^2 = 32$

$x^2 = \frac{32}{2} = 16 \implies x = \mp 4$

تأكد من فهمك

سؤال : اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى لها :

[1] $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

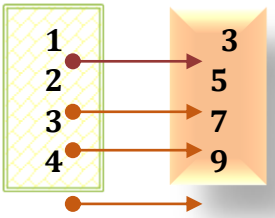
[2] $g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$

الحل :

قاعدة الاقتران : $f(x) = 2x + 1$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= \{3, 5, 7, 9\}$

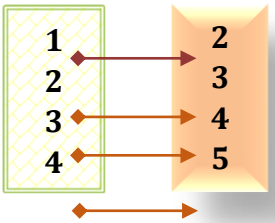


الحل :

قاعدة الاقتران : $f(x) = x + 1$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= \{2, 3, 4, 5\}$



سؤال : اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها :

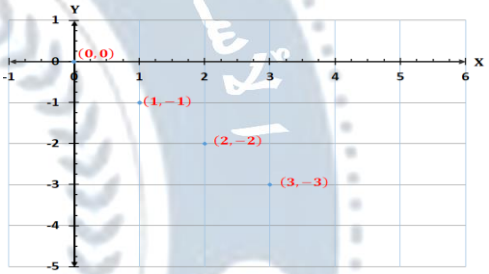
[2] $g = \{(0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$

الحل :

قاعدة الاقتران : $f(x) = -x$

المجال $= \{0, 1, 2, 3\}$

المدى $= \{0, -1, -2, -3\}$



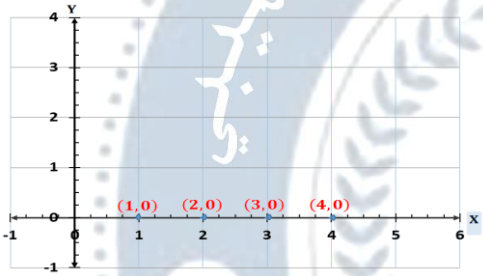
[1] $f = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$

الحل :

قاعدة الاقتران : $f(x) = 0$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= \{0\}$



سؤال : اذا كان التطبيق $f : N \to N$ اذ أن : $f(x) = 3x + 2$ بين هل أن التطبيق شامل أم لا ؟

الحل :

$X = N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ ، $f(x) = 3x + 2$

$f(1) = 3(1) + 2 = 5$

$f(2) = 3(2) + 2 = 8$

$f(3) = 3(3) + 2 = 11$

المدى $= \{5, 8, 11, \ldots\ldots\ldots\}$ $\Leftarrow$ التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل

سؤال : ليكن التطبيقان $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وأن $g : A \to A$ حيث $g(x) = 2x + 5$ جد قيمة x اذا كان : $(f \circ g)(x) = 28$

الحل :

$f[g(x)] = 28$

$f[2x + 5] = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$6x + 15 + 1 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16$

$$6x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{6}$$

سؤال : اذا كانت $f : N \to N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وأن $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 3$ اكتب التطبيق $f \circ g$ بكتابة الأزواج المرتبة لها واكتب مداها وبين نوعها ؟

الحل :

$f \circ g(x) = f[g(x)]$, $X = N = \{1, 2, 3, \dots\dots\dots\}$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(1 + 3) = f(4) = 5(4) + 2 = 22$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(2 + 3) = f(5) = 5(5) + 2 = 27$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(3 + 3) = f(6) = 5(6) + 2 = 32$

الأزواج المرتبة $f \circ g = \{(1, 22), (2, 27), (3, 32), \dots\dots\dots\dots\}$

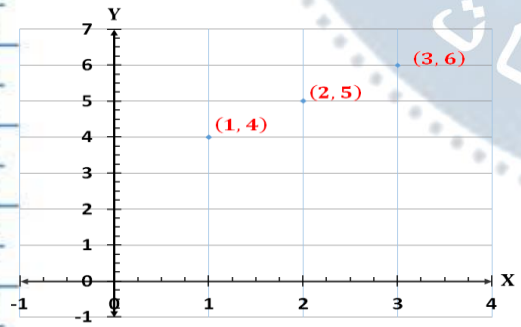
المدى $= \{22, 27, 32, \dots\dots\dots\dots\}$

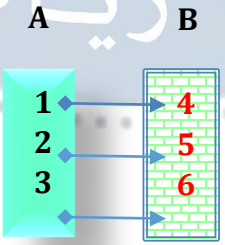
التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

التطبيق متباين لأن $f \circ g(1) \neq f \circ g(2)$ بينما $1 \neq 2$ $\Leftarrow$ التطبيق ليس تقابل .

تدريب وحل التمرينات

سؤال : اذا كان $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ وأن $f : A \to B$ معرف كالآتي $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ ارسم المخطط السهمي للتطبيق وارسم المخطط البياني له وبين نوعه .





الحل :

المدى $= \{4, 5, 6\}$

المجال المقابل $= \{, 5, 6\}$

التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$. التطبيق تقابل

سؤال : اذا كان $f : A \to Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ مثل التطبيق في المستوي الاحداثي وبين هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

الحل :

$f(x) = x^2 \quad , \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

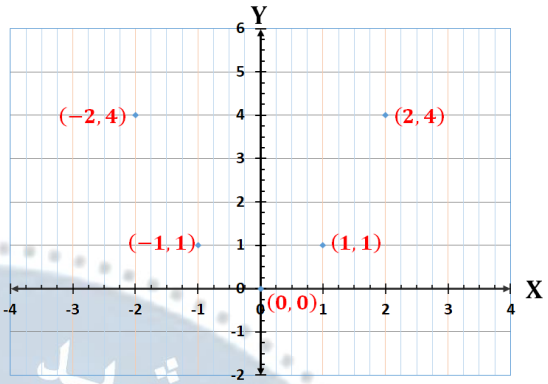
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$



التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$

سؤال : ليكن $f : N \to N$ اذ أن $f(x) = x^2$ و $g : N \to N$ اذ أن $g(x) = x + 1$ والمطلوب إيجاد :

1) $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 2) $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$

الحل :

1) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x + 1] = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(f \circ g)(1) = f[g(2)] = f[2 + 1] = f(3) = (3)^2 = 9$

$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g[(2)^2] = g(4) = 4 + 1 = 5$

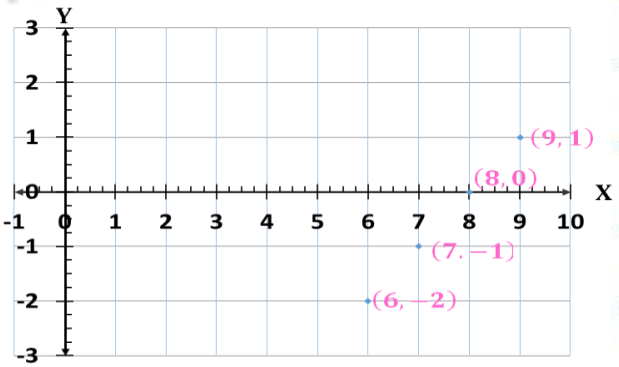
تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **درجات الحرارة :** سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية :

$R = \{(6, -2), (7, -1), (8, 0), (9, 1)\}$ اذ يمثل الاحداثي الأول بالساعة والاحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية . مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الاحداثي بيانيا هل تمثل العلاقة تطبيقا أم لا ؟

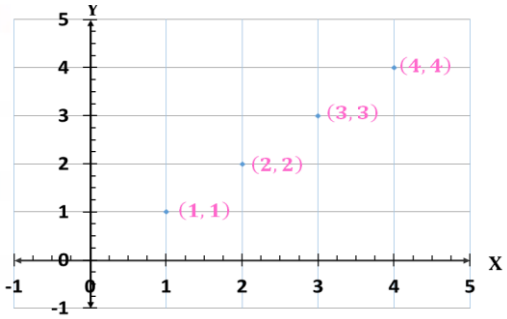
الحل :

الوقت (X)	6	7	8	9
درجة الحرارة (Y)	−2	−1	0	1



العلاقة تمثل تطبيقا لأن كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر واحد من عناصر Y

سؤال : **المستوي الاحداثي :** الشكل البياني المجاور يمثل تطبيق $f : N \longrightarrow N$ اكتب احداثيات الأزواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في البياني واكتب قاعدة اقتران التطبيق وهل التطبيق متباين أم لا ؟



الحل :

الأزواج المرتبة $f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

قاعدة الاقتران : $f(x) = x$

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$ بينما $1 \neq 2$ ((النواتج مختلفة))

سؤال : **الصحة :** العلاقة $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$ تمثل كتلة الماء في جسم الانسان اذ W_r تمثل وزن الماء و W_b تمثل كتلة الانسان كتلة حسان $150kg$ استعمل نظام خاص بانقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقد من كتلته $6kg$ في الشهر الأول ثم $12kg$ في الشهر الثاني , $12kg$ في الشهر الثالث . اكتب جميع الأزواج المرتبة للعلاقة بين كتلة حسان وكتلة الماء في جسمه , هل تمثل تطبيقا أم لا , واكتب المجال والمدى له .

الحل :

$W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$, $W_b = \{150, 150-6=144, 144-12=132, 132-12=120\}$

$W_r(150) = 2\left(\frac{150}{3}\right) = 2(50) = 100$

$W_r(144) = 2\left(\frac{144}{3}\right) = 2(48) = 96$

$W_r(132) = 2\left(\frac{132}{3}\right) = 2(44) = 88$

$W_r(120) = 2\left(\frac{120}{3}\right) = 2(40) = 80$

الأزواج المرتبة $f = \{(150,100),(144,96),(132,88),(120,80)\}$

يمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل .

فـكـر

سؤال : **تحد :** اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ وكان $f : A \to A$ و $g : A \longrightarrow A$ معرفان كما يلي :

$f = \{(1,3),(3,3),(2,3)\}$, $g = \{(3,1),(1,2),(2,3)\}$ بين هل أن : $f \circ g = g \circ f$ ؟

الحل :

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$
$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$
$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$
$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$
$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$
$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

سؤال : أصحح الخطأ : قال ياسين أن العلاقة $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = x^3$ لا تمثل تطبيقا متباينا . حدد خطأ ياسين وصححه .

الحل :

$f(x) = x^3 \quad , \quad X = Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

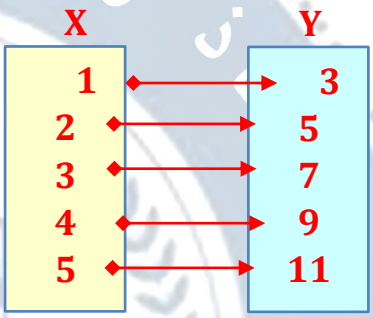
$f(-2) = (-2)^3 = -8 \quad , \quad f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(0) = (0)^3 = 0 \quad , \quad f(1) = (1)^3 = 1 \quad , \quad f(2) = (2)^3 = 8$

التطبيق متباين لأن $f(-1) \neq f(1)$ بينما $-1 \neq 1$ ((النواتج مختلفة))

سؤال : حس عددي : حدد ما اذا كانت كل علاقة فيما يلي تمثل تطبيقا أم لا ؟ فسر ذلك .

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11



الحل :

العلاقة تمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y

سؤال : اكتب : ليكن التطبيق $f : N \to Z$ حيث $f(x) = 4x - 3$ اذا كان $(f \circ f)(x) = 33$ فجد قيمة x؟

الحل :

$f[f(x)] = 33$

$f(4x - 3) = 33$

$4(4x - 3) - 3 = 33$

$16x - 12 - 3 = 33 \quad \Rightarrow \quad 16x - 15 = 33$

$16x = 33 + 15 \quad \Rightarrow \quad 16x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{48}{16} = 3$

مراجعة الفصل

تدريب : اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكان التطبيقان $f : A \to A$ و $g : A \to A$ معرفين كما يأتي :

$f = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$, $g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ فجد تركيب الدالتين : 1) $f \circ g$ 2) $g \circ f$

الحل :

i) $f \circ g(x) = f[g(x)]$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$

ii) $g \circ f(x) = g[f(x)]$

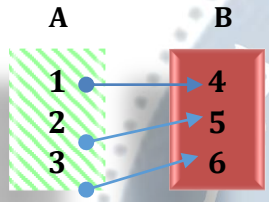
$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

سؤال : اذا كان التطبيق $R : A \to B$ معطى كما يأتي : $R = \{(1,4),(2,4),(3,5)\}$ حيث : $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$ مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق .

الحل :



المجال $= \{1,2,3\}$

المدى $= \{4,5\}$

اختبارات الفصل

سؤال : اذا كانت $f : Z \to R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططا سهميا للدالة وبين هل أن الدالة متباينة أو شاملة أو تقابل ؟

الحل :

$f(x) = x^2$, $X = Z = \{-2,-1,0,1,2\}$

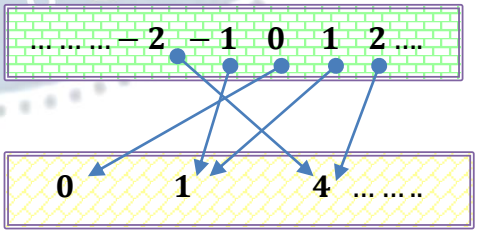
$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$



المدى $= \{4,1,0\}$. التطبيق غير شامل لأن المدى $\neq$ المجال القابل R

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$ (النواتج متشابهة) . التطبيق ليس تقابل .

سؤال : اذا كانت الدالة $f : N \to N$ اذا أن $f(x) = 3x + 1$ و $g : N \to N$ اذا أن $g(x) = x^2$ جد :

$(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(5)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ g)(2)$

الحل :

$g \circ f(5) = g[f(5)] = g[3(5)+1] = g(16) = (16)^2 = 256$

$f \circ g(5) = f[g(5)] = f[(5)^2] = f(25) = 3(25)+1 = 75+1 = 76$

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g[3(2)+1] = g(7) = (7)^2 = 49$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f[(2)^2] = f(4) == 3(4)+1 = 12+1 = 13$

سؤال : اذا كانت الدالة $f : R \to R$ حيث $f(x) = 3x+1$ والدالة $g : R \to R$ حيث $g(x) = 2x$

هل أن $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ثم جد قيمة x اذا كانت $(f \circ g)(x) = 28$

الحل :

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x+1) = 2(3x+1) - 5 = 6x+2-5 = 6x-3$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x+5) = 3(2x+5)+1 = 6x+15+1 = 6x+16$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

$(f \circ g)(x) = 28$

$f[g(x)] = 28$

$f(2x+5) = 28 \implies 3(2x+5)+1 = 28 \implies 6x+15+1 = 25$

$16x+16 = 28 \implies 6x = 28-16 \implies 6x = 12 \implies x = \frac{12}{2} = 2$

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

[1] اذا كان التطبيق $f : A \to B$ معرف كالآتي : $x \to x+1$

حيث $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,68\}$ فأن مدى التطبيق هو :

a) $\{2,4,8\}$ b) $\{4,6,8\}$ c) $\{2,4,6\}$ d) $\{2,6,8\}$

الحل :

$x \to x+1$, $A = \{1,3,5\}$

$1 \to 1+1 = 2$, $2 \to 3+1 = 4$

$5 \to 5+1 = 6$

المدى $= \{2,4,6\}$

الجواب فرع : (c)

[2] اذا كانت $A = \{1,2,-2,-3\}$ وكان $g : A \to Z$

فأن مدى

التطبيق اذا كان $g(x) = 5x-3$ هو :

a) $\{2,9,13,18\}$ b) $\{2,7,-13,-18\}$

c) $\{9,13,18,21\}$ d) $\{7,13,15,18\}$

الحل :

$g(x) = 5x-3$,

$A = \{1,2,-2,-3\}$

$g(1) = 5(1)-3 = 5-3 = 2$

$g(2) = 5(2)-3 = 10-3 = 7$

$g(-2) = 5(-2)-3 = -10-3 = -13$

$g(-3) = 5(-3)-3 = -15-3 = -18$

المدى $= \{2,7,-13,-18\}$

الجواب فرع : (b)

[4] ليكن $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{4,6,8\}$ اذا $f : A \longrightarrow B$ وأن $f = \{(2,4),(3,6),(4,8),(5,8)\}$ فأن f يمثل تطبيقا شاملا لأن :

a) المدى ≠ المجال المقابل b) $f(u) = f(s)$

c) المدى هو المجال مجموعة A = المدى d) المجال المقابل

الحل : الجواب فرع : (d)

[3] اذا كانت $f : Z \longrightarrow R$ اذ $f(x) = 3x - 2$ فأن العدد 10 هو صورة للعدد :

a) 5 b) 4 c) 2 d) 3

الحل :

$f(4) = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$

الجواب فرع : (b)

[6] ليكن $f : \{2,3,5\} \to N$ اذ $f(x) = 3x - 1$ و $g : N \to N$ اذ $g(x) = x + 1$ فأن مدى $g \circ f$ هو :

a) $R_{g\circ f} = \{5, 8, 14\}$ b) $R_{g\circ f} = \{5, 6, 9\}$

c) $R_{g\circ f} = \{6, 9, 15\}$ d) $R_{g\circ f} = \{6, 9, 12\}$

الحل :

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g[3(2) - 1] = g(5) = 5 + 1 = 6$

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g[3(3) - 1] = g(8) = 8 + 1 = 9$

$g \circ f(5) = g[f(5)] = g[3(5) - 1] = g(14) = 14 + 1 = 15$

المدى هو $R_{g\circ f} = \{6, 9, 15\}$

الجواب فرع : (c)

[5] اذا كانت $f : N \to N$ اذ $f(x) = 2x - 3$ و $g : N \to N$ اذ $g(x) = x + 1$ فأن التطبيق $(g \circ f)(x)$ هو

a) $2x - 2$ b) $2x - 4$

c) $2x + 2$ d) $2x + 4$

الحل :

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x - 3) = 2x - 3 + 1 = 2x - 2$

الجواب فرع : (a)

[7] اذا كان التطبيق $f : Q \to Q$ اذ $f(x) = 4x + 1$ والتطبيق $g : Q \to Q$ اذ $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ جد قيمة x اذا كانت $(f \circ g)(x) = 45$ فأن قيمة x هي :

a) ∓ 5 b) ± 6 c) ± 7 d) ± 8

الحل :

$(f \circ g)(x) = 45 \implies f[g(x)] = 45$

$f\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)=45$ $4\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)+1=45$ $\frac{4}{3}x^2-4+1=45 \Rightarrow \frac{4}{3}x^2-3=45$ $\frac{4}{3}x^2=45+3 \Rightarrow \frac{4}{3}x^2=48$ $4x^2=144 \Rightarrow x^2=\frac{144}{4}$ $x^2=36 \Rightarrow x=\pm 6$ الجواب فرع : (b)	

الدرس [4 – 1] : المتباينات المركبة

(1) المتباينات المركبة التي تتضمن (و)

المتباينة المركبة التي تحتوي (و) مؤلفة من متباينتين فأنها تكون صحيحة فقط اذا كانت المتباينتان صحيحتين وعليه فأن مجموعة الحل عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين ويمكن ايجاده بطريقتين :

الطريقة الأولى : بيانيا بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع .

الطريقة الثانية : جبريا وذلك بايجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S = S_1 \cap S_2)$

ملاحظـــة : تحتوي المتباينة على الرمز $\geq , \leq , > , <$

طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و)

1) التخلص من الكسور والأقواس أن وجدت .

2) وضع المتغير في الوسط .

3) اذا كان هناك عدد مع المتغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الإشارة .

4) اذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة اطراف المتباينة على معامل المتغير .

5) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة وذلك بطريقتين :

الطريقة الأولى (بيانيا)

- تتم تجزئة المتباينة الى جزئين ونحل كل جزء على حدة ونستخرج مجموعة الحل ومجموعة حل الجزء الاخر
- نجد تقاطع مجموعة الحلين على خط الأعداد حيث أن التقاطع يمثل مجموعة حل المتباينة المركبة .

الطريقة الثانية (جبريا)

- هو أن الجزء الأول من المتباينة يرمز له S_1 والجزء الثاني يرمز له S_2 ومنها نجد $S = S_1 \cap S_2$

■ عند ضرب أو قسمة اطراف المتباينة المركبة على عدد سالب فأن الترتيب يتغير (تقلب رموز المتباينة) .

■ اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على رمز $\leq$ أو $\geq$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة ممتلئة بالصورة ( ) أي أن العدد داخل ضمن الفترة . أما اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على الرمز $<$ أو $>$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة فارغة بالصورة ( ) أي أن العدد غير داخل ضمن الفترة

سؤال : تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول $8^\circ C$ ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى $15^\circ C$. اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها؟

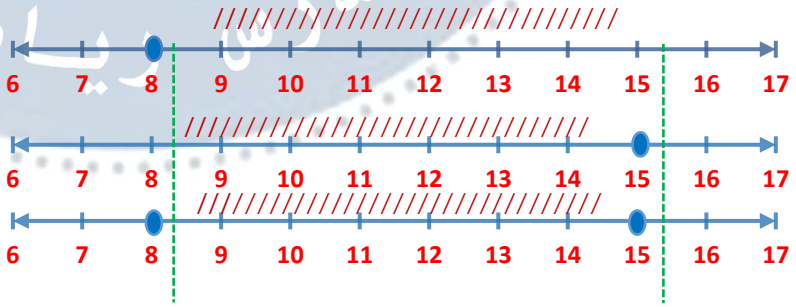
الحل : درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن 8° : $(x \geq 8^\circ)$, درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد عن 15° : $(x \leq 15^\circ)$

الطريقة الأولى : بيانياً

$x \geq 8$

$x \leq 15$

$8 \leq x \leq 15$



الطريقة الثانية : جبرياً

$8 \leq x \leq 15 \iff x \geq 8$ و $x \leq 15$

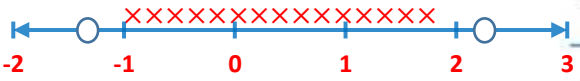
$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 8\} \cap \{x : x \leq 15\}$

سؤال : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) : $-3 \leq 3x + 2 < 9$ جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد .

الحل :

$$-3 \le 3x + 2 < 9 \quad \Rightarrow \quad -3 - 2 \le 3x < 9 - 2$$

$$-5 \le 3x < 7 \ \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-5}{3} \le \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$



$$\frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ x : \frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3} \right\}$$

(2) المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

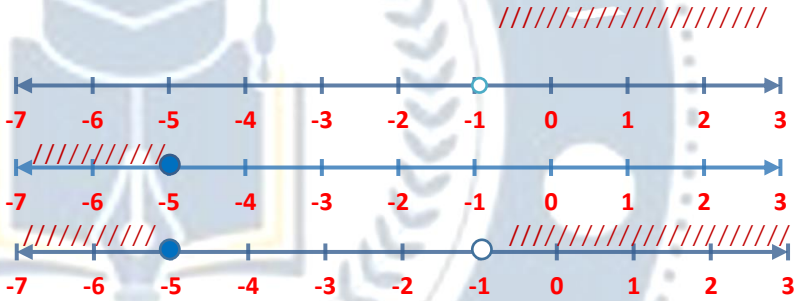
طريقة حل المتباينة هي نفس طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و) لكن بدل ان نأخذ مجموعة تقاطع الجزئيين نأخذ مجموعة اتحاد الجزئيين $S = S_1 \cup S_2$

سؤال : حل المتباينة المركبة $x + 3 > 2$ أو $x + 3 \le -2$ بيانيا وجبريا .

الحل :

الطريقة الأولى : بيانياً

$$x + 3 > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 2 - 3$$
$$x > -1$$
$$x + 3 \le -2 \quad \Rightarrow \quad x \le -2 - 3$$
$$x \le -5$$
$$x \le -5 \quad \text{أو} \quad x > -1$$

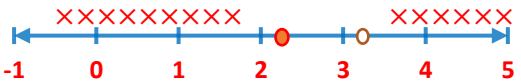


الطريقة الثانية : جبرياً

$$x + 3 \le -2 \quad \text{أو} \quad x + 3 > 2$$
$$x \le -2 - 3 \quad \text{أو} \quad x > 2 - 3$$
$$x \le -5 \quad \text{أو} \quad x > -1 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > -1\} \cup \{x : x \le -5\}$$

سؤال : حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1) $y - 3 \le -1$ أو $y + 3 > 6$



SOL : $y \le -1 + 3$ أو $y > 6 - 3 \quad \Rightarrow \quad y \le 2$ أو $y > 3$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \le 2\} \cup \{y : y > 3\}$$

2) $\frac{2v + 1}{3} > \frac{5}{3}$ أو $\frac{2v + 1}{3} < \frac{1}{3}$ $\} \times 3$

SOL:

$\frac{2v+1}{3} \times 3 > \frac{5}{3} \times 3$ أو $\frac{2v+1}{3} \times 3 < \frac{1}{3} \times 3$

$2v+1 > 5$ أو $2v+1 < 1 \Rightarrow 2v > 5-1$ أو $2v < 1-1$

$2v > 5-1$ أو $2v < 1-1 \Rightarrow 2v > 4$ أو $2v < 0$

$\frac{2v}{2} > \frac{4}{2}$ أو $\frac{2v}{2} < \frac{0}{2}$

$v > 2$ أو $v < 0$

$S = S_1 \cup S_2 = \{v : v > 2\} \cup \{v : v < 0\}$

المتباينة المثلثية

في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث . اذا كانت اطوال اضلاع المثلث (A , B , C) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث صحيحة :

$A + B > C \quad , \quad A + C > B \quad , \quad B + C > A$

سؤال : هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها $2cm , 10cm , 13cm$ أن تشكل مثلثا ؟

الحل :

$2 + 10 \not> 13 \Rightarrow 12 \not> 13$ خطأ لأن 12 أصغر من 13

$2 + 13 > 10 \Rightarrow 15 > 10$ صحيحة

$10 + 13 > 2 \Rightarrow 23 > 2$ صحيحة

لا يمكن أن يشكل مثلثا .

سؤال : اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $10cm , 8cm$

الحل :

نفرض طول الضلع الثالث $x \Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $10 , 8 , x$

$10 + 8 > x \Rightarrow 18 > x$ الضلع الثالث أصغر من 18

$10 + x > 8 \Rightarrow x > 8 - 10 \Rightarrow x > -2$ يهمل

$8 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 8 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 18$ أو تكتب : $18 > x > 2$

تأكد من فهمك

سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانيا :

1) $-4 \le y - 1 < 3$

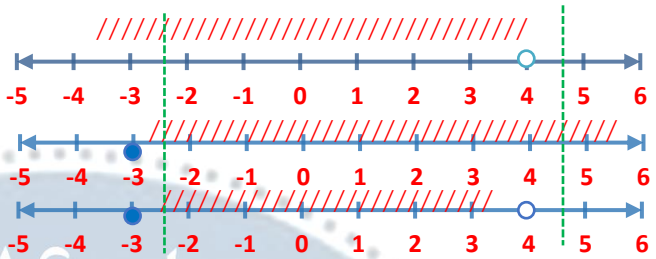
الحل :

$-4 + 1 \le y < 3 + 1 \Rightarrow -3 \le y < 4$

$y < 4$

$y \ge -4$

$-3 \le y < 4$



2) $-4 \le Z + 2 \le 8$

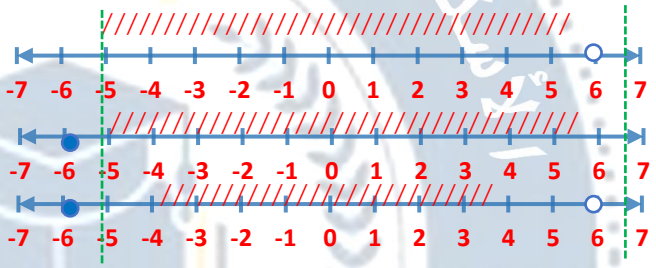
الحل :

$-4 - 2 \le Z < 8 - 2 \Rightarrow -6 \le Z < 6$

$Z < 6$

$Z \ge -6$

$-6 \le Z < 6$



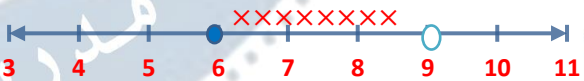
سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

1) $x + 6 \ge 12$ و $x + 6 < 15$

الحل :

$x \ge 12 - 6$ و $x < 15 - 6 \Rightarrow x \ge 6$ و $x < 9$

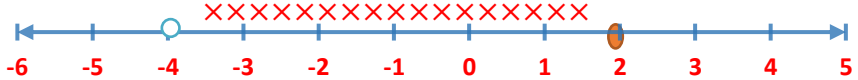
$S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \ge 6\} \cap \{x: x < 9\} = \{x : 6 \le x < 9\}$



2) $-9 < 2x - 1 \le 3$

SOL : $-9 + 1 < 2x \le 3 + 1 \Rightarrow -8 < 2x < 4$ $\} \div 2$

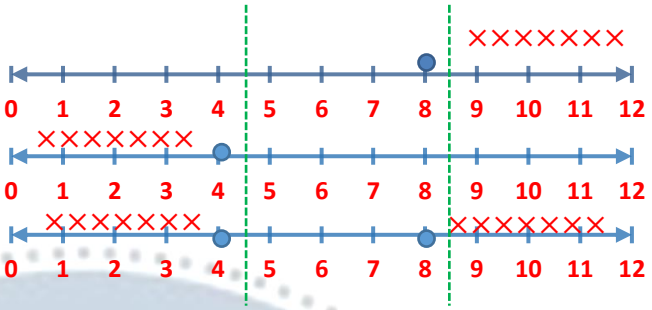
$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \le \frac{4}{2} \Rightarrow -4 < x \le 2 \Rightarrow S = \{x : -4 < x \le 2\}$



سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانيا

3) $8y \geq 64$ أو $8y \leq 32$ $\} \div 8$

الحل :

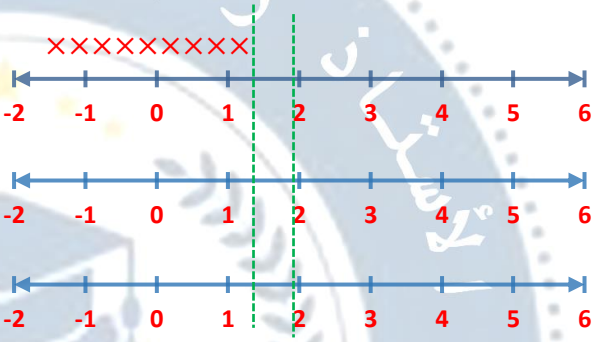


4) $\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الحل :

$\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3} \} \times 3 \Rightarrow 2Z < 2 \} \div 2$

$\Rightarrow Z < 1$



$\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9} \} \times 9 \Rightarrow 6Z \geq 8 \} \div 6 \Rightarrow Z \geq \frac{8}{6}$

$Z \geq \frac{4}{3} \Rightarrow Z < 1$ أو $Z \geq \frac{4}{3}$

5) $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \leq -9$

الحل :

$3n > -5 + 7$ أو $3n \leq -9 + 7$

$3n > 2$ أو $3n \leq -2 \Rightarrow \frac{3n}{3} > \frac{2}{3}$ أو $\frac{3n}{3} \leq \frac{-2}{3}$

$n > \frac{2}{3}$ أو $n \leq \frac{-2}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{n : n > \frac{2}{3}\right\} \cup \left\{n : n \leq \frac{-2}{3}\right\}$

6) $x + 15 \geq 30$ أو $x + 15 < 22$

الحل :

$x \geq 30 - 15$ أو $x < 22 - 15$

$x \geq 15$ أو $x < 7$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 15\} \cup \{x : x < 7\}$$

سؤال : هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي :

1) 1 cm ، 2cm ، $\sqrt{3}$ cm

الحل :

$1 + 2 > \sqrt{3} \Rightarrow 3 > \sqrt{3}$ صحيحة

$1 + \sqrt{3} > 2 \Rightarrow 1 + 1.7 > 2 \Rightarrow 2.7 > 2$ صحيحة

$2 + \sqrt{3} > 1 \Rightarrow 2 + 1.7 > 1 \Rightarrow 3.7 > 1$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

2) 5cm ، 4cm ، 9cm

لم تحقق شرط المثلث

الحل :

$5 + 4 \not> 9 \Rightarrow 9 \not> 9$ خطأ لأن 9 ليس أكبر من 9

$5 + 9 > 4 \Rightarrow 14 > 4$ صحيحة

$4 + 9 > 5 \Rightarrow 13 > 5$ صحيحة $\Rightarrow$ لا يمكن رسم مثلثاً

3) 1cm ، $\sqrt{2}$cm ، $\sqrt{2}$cm

الحل :

$1 + \sqrt{2} > \sqrt{2}$ صحيحة لأن $\sqrt{2} = 1.4$

$\sqrt{2} + \sqrt{2} > 1$ صحيحة

$\sqrt{2} + 1 > \sqrt{2}$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

4) 3cm ، 4cm ، $\sqrt{3}$cm

الحل :

$3 + 4 > \sqrt{3} \Rightarrow 7 > \sqrt{3}$ صحيحة لأن $\sqrt{3} = 1.7$

$3 + \sqrt{3} > 4 \Rightarrow 3 + 1.7 > 4 \Rightarrow 4.7 > 4$ صحيحة

$4 + \sqrt{3} > 3 \Rightarrow 4 + 1.7 > 3 \Rightarrow 5.7 > 3$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

١

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانيا :

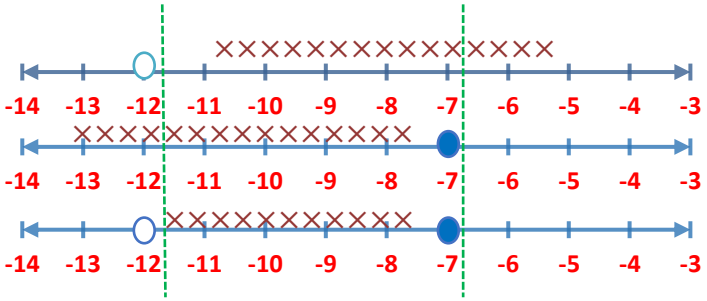
1) $x > -12$ و $x \leq -7$

الحل :

$x > -12$

$x \leq -7$

$x > -12$ و $x \leq -7$



2) $2 \leq y + 4 < 6$

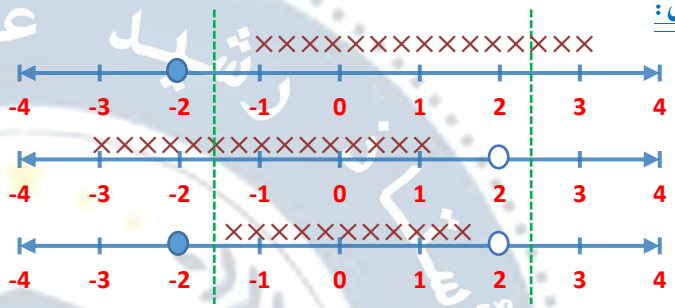
الحل :

$2 - 4 \leq y < 6 - 4 \Rightarrow -2 \leq y < 2$

$y \geq -2$

$y < 2$

$-2 \leq y < 2$



سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

1) $14 \leq 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$

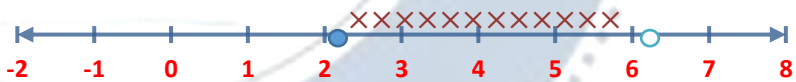
الحل :

$14 - 7 \leq 3x$ و $3x < 26 - 7$

$7 \leq 3x$ و $3x < 19 \} \div 3$

$\frac{7}{3} \leq \frac{3x}{3}$ و $\frac{3x}{3} < \frac{19}{3}$

$\frac{7}{3} \leq x$ و $x < \frac{19}{3} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \left\{x : \frac{7}{3} \leq x\right\} \cap \left\{x : x < \frac{19}{3}\right\}$



2) $\frac{1}{25} \leq \frac{Z+3}{5} \leq \frac{1}{15} \} \times 75$

الحل :

$\frac{1}{15} \times 75 \geq \frac{Z+3}{5} \times 75 \geq \frac{1}{25} \times 75$

$5 \geq 15(Z+3) \geq 3 \Rightarrow 5 \geq 15Z + 45 \geq 3 \Rightarrow 5 - 45 \geq 15Z \geq 3 - 45$

$-40 \geq 15Z \geq -42 \} \div 15 \Rightarrow \frac{-40}{15} \geq \frac{15Z}{15} \geq \frac{-42}{15}$

5	15 , 5 , 25
5	3 , 1 , 5
3	3 , 1 , 1
75	1 , 1 , 1

$$\frac{-8}{3} \geq Z \geq \frac{-14}{5} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{Z : \frac{-8}{3} \geq Z \geq \frac{-14}{5}\right\}$$

سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانيا :

1) $Z - 2 < -7$ أو $Z - 2 > 4$

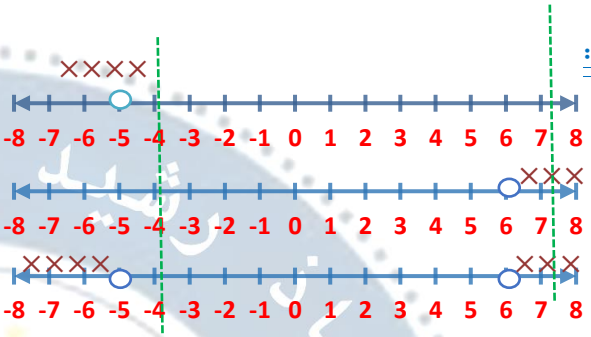
الحل :

$Z < -7 + 2$ أو $Z > 4 + 2 \Rightarrow Z < -5$ أو $Z > 6$

$Z < -5$

$Z > 6$

$Z < -5$ أو $Z > 6$



2) $x - 6 \leq -1$ أو $x - 6 > 4$

الحل :

$x \leq -1 + 6$ أو $x > 4 + 6 \Rightarrow x \leq 5$ أو $x > 10$

$x \leq 5$

$x > 10$

$x \leq 5$ أو $x > 10$

سؤال : حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1) $x + 8 < 22$ أو $x + 10 \geq 30$

الحل :

$x < 22 - 8$ أو $x \geq 30 - 10$

$x < 14$ أو $x \geq 20$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x < 14\} \cup \{x : x \geq 20\}$

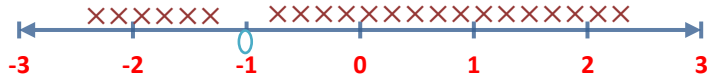
2) $y < -1$ أو $y + 3 > 2$

الحل :

$y < -1$ أو $y > 2 - 3$

$y < -1$ أو $y > -1$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < -1\} \cup \{y : y > -1\}$



3) $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

الحل :

$\frac{y}{2} < \frac{7}{2}$ أو $\frac{y}{2} > \frac{15}{2}$ $\}\times 2$

$y < 7$ أو $y > 15$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < 7\} \cup \{y : y > 15\}$

4) $5x \le -1$ أو $5x \ge 4$ $\}\div 5$

الحل :

$x \le \frac{-1}{5}$ أو $x \ge \frac{4}{5}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \le \frac{-1}{5}\right\} \cup \left\{x : x \ge \frac{4}{5}\right\}$

سؤال : اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث اذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين

1) 3cm , 10cm

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث x , 10 , 3

$3 + 10 > x \Rightarrow 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$10 + x > 3 \Rightarrow x > 3 - 10 \Rightarrow x > -7$ لا يعطي معلومات مفيدة

$3 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 3 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث اكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 13$

2) 6cm , 4cm

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث x , 4 , 6

$6 + 4 > x \Rightarrow 10 > x$ الضلع الثالث أصغر من 10

$6 + x > 4 \Rightarrow x > 4 - 6 \Rightarrow x > -2$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4 + x > 6 \Rightarrow x > 6 - 4 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 10$

3) 1cm , 3cm

الحل :

نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ اطوال اضلاع المثلث 1 , 3 , x

$1 + 3 > x \quad \Rightarrow \quad 4 > x$ الضلع الثالث أصغر من 4

$3 + x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 1 - 3 \quad \Rightarrow \quad x > -2$ لا يعطي معلومات مفيدة

$1 + x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 4$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال :

صوت : أذن الأنسان يمن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هيرتزا ولا يزيد عن 20000 هيرتز اكتب المتباينة المركبة تمثل الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان ومثلها بيانيا .

الحل : نفرض التردد x

الترددات التي تسمعها أذن الأنسان هي أكبر أو يساوي 20 وأصغر أو يساوي 20000 تكتب $20 \le x \le 20000$

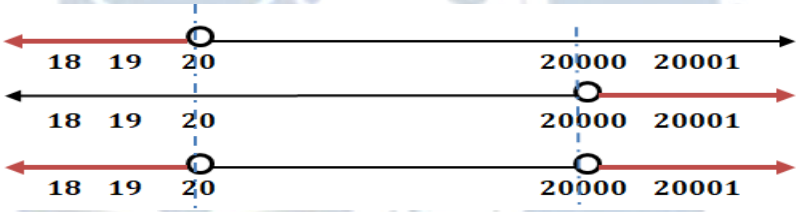
الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان هي أصغر من 20 واكبر من 20000 وتكتب :

$x < 20$ أو $x > 20000$

$x < 20$

$x > 20000$

$x < 20$ أو $x > 20000$



سؤال :

أطار السيارات :ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن $28\ pascal\ (kg/ing^2)$ ولا يزيد على $36\ pascal$. اكتب المتباينة المركبة تمثل الضغط ومثلها بيانيا ؟

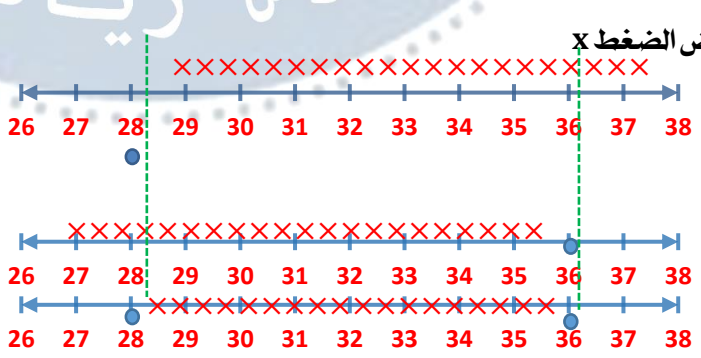
الحل : نفرض الضغط x

$28 \le x \le 36$ المتباينة المركبة

$x \ge 28$

$x \le 36$

$28 \le x \le 36$



سؤال :

قطار المغناطيسي : القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف . وصممت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم اذ أن سرعتها لا تقل عن $300\ k/h$ ولا تزيد على $550\ k/h$ اكتب متباينة تمثل سرعة القطار ومثلها بيانيا .

الحل : نفرض سرعة القطار x

$300 \leq x \leq 550$ المتباينة

$x \geq 300$

$x \leq 550$

$300 \leq x \leq 550$

فـــــكر

سؤال : تحد : اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث :

i) 7cm , 12cm , xcm

الحل :

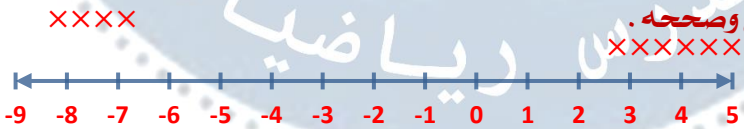
$7 + 12 > x \Rightarrow 19 > x$ الضلع الثالث أصغر من 19

$12 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 12 \Rightarrow x > -5$ لا تعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 7 \Rightarrow x > 5$ الضلع الثالث اكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 19$

سؤال : أصحح الخطأ : قالت سوسن أن المتباينة المركبة $x + 3 \leq 5$ و $x + 3 > -1$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد الآتية : بين خطأ سوسن وصححه .

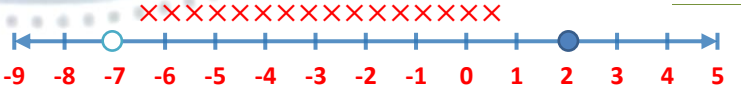


الحل :

$x \leq 5 - 3$ و $-4 - 3 < x$

$x \leq 2$ و $-7 < x$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x > -7\} \cap \{x : x \leq 2\} = \{x : -7 < x \leq 2\}$



سؤال : حس عددي : اذكر ما اذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا ؟ وضح اجابتك .

1) 3.2cm , 5.2cm , 6.2cm

الحل :

$3.2 + 5.2 > 6.2 \Rightarrow 8.4 > 6.2$ صحيحة

$3.2 + 6.2 > 5.2 \quad \Rightarrow \quad 9.4 > 5.2$ صحيحة

$5.2 + 6.2 > 3.2 \quad \Rightarrow \quad 11.4 > 3.2$ صحيحة $\Rightarrow$ الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

2) 1cm , 1cm , $\sqrt{2}\ \text{cm}$

الحل :

$1 + 1 > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2 > \sqrt{2}$ صحيحة لأن $\sqrt{2} = 1.4$

$1 + \sqrt{2} > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + 1.4 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2.4 > 1$ صحيحة

$\sqrt{2} + 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad 1.4 + 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2.4 > 1$ صحيحة $\Rightarrow$ الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

سؤال : أكتب متباينة مركبة تمثل درجة الحرارة الصغرى $18°$ ودرجة الحرارة العظمى $27°$

الحل : نفرض درجة الحرارة x

$x > 18° \quad$ و $\quad x < 27° \quad \Rightarrow \quad S = \{x : 18° < x < 27°\}$

مراجعة الفصل

تدريب 1 : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $-9 < 2x - 1 \leq 3$

الحل :

$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad -8 < 2x \leq 4 \ \} \div 2$

$-4 < x \leq 2 \Rightarrow S = \{x : -4 < x \leq 2\}$

تدريب 2 : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد $2y - 6 \leq -7$ أو $2y - 6 > -3$

الحل :

$2y > -3 + 6$ أو $2y \leq -7 + 6$

$2y > 3$ أو $2y \leq -1 \ \} \div 2$

$y > \frac{3}{2}$ أو $y \leq \frac{-1}{2}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y > \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{y : y \leq \frac{-1}{2}\right\}$

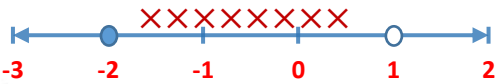
مثال 1 : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $2x - 2 < 0$ و $2x - 2 \geq -6$

الحل :

$2x \geq -6 + 2$ و $2x < 0 + 2 \Rightarrow 2x \geq -4$ و $2x \leq 2$ $\} \div 2$

$x \geq -2$ و $x < 1$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq -2\} \cap \{x : x < 1\}$



مثال 2 : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $x + 1 < -4$ أو $x + 1 > 3$

الحل :

$x > 3 - 1$ أو $x \leq -4 - 1$

$x > 2$ أو $x \leq -5$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq -5\}$

اختبار الفصل

سؤال : حل المتباينات المركبة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

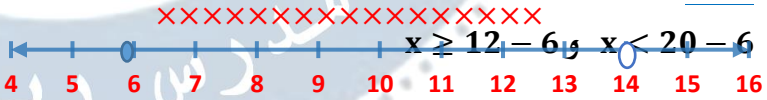
1) $x + 6 < 20$ و $x + 6 \geq 12$

الحل :

$x < 20 - 6$ و $x \geq 12 - 6$

$x \geq 6$ و $x < 14$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 6\} \cap \{x : x < 14\}$



2) $\frac{1}{16} < \frac{Z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$ $\} \times 16$

الحل :

$1 < 8(Z + 2) \leq 2 \Rightarrow 1 < 8Z + 16 \leq 2$

$1 - 16 < 8Z \leq 2 - 16 \Rightarrow -15 < 8Z \leq -14$

$\frac{-15}{8} < \frac{8Z}{8} \leq \frac{-14}{8} \Rightarrow \frac{-15}{8} < Z \leq \frac{-7}{4} \Rightarrow S = \left\{Z : \frac{-15}{8} < Z \leq \frac{-7}{4}\right\}$

3) $x-3\le -5$ أو $x-3>5$

الحل :

$x\le -5+3$ أو $x>5+3$

$x\le -2$ أو $x>8$

$S=S_1\cup S_2=\{x:x\le -2\}\cup\{x:x>8\}$

4) $7t-5>-1$ أو $7t-5\le -14$

الحل :

$7t>-1+5$ أو $7t\le -14+5$

$7t>4$ أو $7t\le -9$ $\}\div 7$

$t>\frac{4}{7}$ أو $t\le\frac{-9}{7}\Rightarrow S=S_1\cup S_2=\left\{t:t>\frac{4}{7}\right\}\cup\left\{t:t\le\frac{-9}{7}\right\}$

5) $y\le 0$ أو $y+7\ge 16$

الحل :

$y\le 0$ أو $y\ge 16-7$

$y\le 0$ أو $y\ge 9\Rightarrow S=S_1\cup S_2=\{y:y\le 0\}\cup\{y:y\ge 9\}$

6) $\frac{y}{3}<1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3}>9\frac{1}{3}$

الحل :

$\frac{y}{3}<\frac{4}{3}$ أو $\frac{y}{3}>\frac{28}{3}\Big]\times 3$

$y<4$ أو $y>28$

$S=S_1\cup S_2=\{y:y<4\}$
$\cup\{y:y>28\}$

سؤال : اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا ضلعي مثلث معلومين :

1) 4cm , 9cm

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث x , 4, 9

$4+9>x\Rightarrow 13>x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$9+x>4\Rightarrow x>4-9\Rightarrow x>-5$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4+x>9\Rightarrow x>9-4\Rightarrow x>5$ الضلع الثالث اكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5<x<13$

2) 5cm , 12cm

الحل: نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , x

$5 + 12 > x \Rightarrow 17 > x$ الضلع الثالث أصغر من 17

$12 + x > 5 \Rightarrow x > 5 - 12 \Rightarrow x > -7$ لا يعطي معلومات مفيدة

$5 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 5 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث اكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 17$

3) 7cm , 15cm

الحل: نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ اطوال اضلاع المثلث 7, 15 , x

$7 + 15 > x \Rightarrow 22 > x$ الضلع الثالث أصغر من 22

$15 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 15 \Rightarrow x > -8$ لا يعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 15 \Rightarrow x > 15 - 57 \Rightarrow x > 8$ الضلع الثالث اكبر من 8

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $8 < x < 22$

الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا :

[1] $-10 < x$ و $x \leq -2$

a) $\{x: -10 \leq x\} \cap \{x: x \leq -2\}$
b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \leq -2\}$
c) $\{x: -10 \leq x\} \cup \{x: x \leq -2\}$
d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \leq -2\}$

الحل:

$S = S_1 \cap S_2 = \{x: -10 < x\} \cap \{x: x \leq -2\}$

الجواب فرع : (b)

[2] $0 \leq y - 3$ و $y - 3 < 12$

a) $\{y: 3 < y < 15\}$ b) $\{y: -3 \leq y \leq 15\}$
c) $\{y: 3 \leq y < 15\}$ d) $\{y: -3 < y < 15\}$

الحل:

$0 + 3 \leq y$ و $y < 12 + 3 \Rightarrow 3 \leq y$ و $y < 15$

$S = S_1 \cap S_2 = \{y : 3 \leq y\} \cap \{y : y < 15\}$
$= \{y : 3 \leq y < 15\}$

الجواب : (c)

[3] $16 < 3Z + 9$ و $3Z + 9 < 30$

a) $\left\{Z : \frac{3}{7} \le Z < 7\right\}$ b) $\left\{Z : \frac{7}{3} < Z \le 7\right\}$

c) $\left\{Z : \frac{3}{7} < Z < 7\right\}$ d) $\left\{Z : \frac{7}{3} < Z < 7\right\}$

الحل :

$16 - 9 < 3Z$ و $3Z < 30 - 9$

$7 < 3Z$ و $3Z < 21$

$\frac{7}{3} < \frac{3Z}{3}$ و $\frac{3Z}{3} < \frac{21}{3} \Rightarrow \frac{7}{3} < Z$ و $Z < 7$

$S = S_1 \cap S_2 = \left\{Z : \frac{7}{3} < Z\right\} \cap \{Z : Z < 7\}$

$= \left\{Z : \frac{7}{3} < Z < 7\right\}$ فرع الجواب : (d)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا

[4] $2t - 4 > -8$ أو $2t - 4 \le -12$

a) $\{t : t > -2\} \cap \{t : t \le -4\}$

b) $\{t : t > -2\} \cup \{t : t \le -4\}$

c) $\{t : t < -2\} \cap \{t : t \ge -4\}$

d) $\{t : t < -2\} \cup \{t : t \ge -4\}$

الحل :

$2t > -8 + 4$ أو $2t \le -12 + 4$

$2t > -4$ أو $2t \le -8$ $\} \div 2$

$t > -2$ أو $t \le -4$

$S = S_1 \cup S_2 = \{t : t > -2\} \cup \{t : t \le -4\}$

الجواب فرع : (a)

[5] $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$

a) $\{y : y < 4\} \cap \{y : y > 2\}$

b) $\{y : y > -4\} \cup \{y : y < 2\}$

c) $\{y : y < -4\} \cap \{y : y > -2\}$

d) $\{y : y < -4\} \cup \{y : y > 2\}$

الحل :

$\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$ $\} \times 3$

$y + 5 < 1$ أو $y + 5 > 7$

$y < 1 - 5$ أو $y > 7 - 5$

$y < -4$ أو $y > 2$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < -4\} \cup \{y : y > 2\}$

الجواب فرع : (d)

اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا الضلعين الاخرين للمثلث معلومين:

[6] 5cm , 12cm

a) $7 < Z < 17$ b) $7 \le Z < 17$

c) $7 \le Z \le 17$ d) $7 < Z \le 17$

الحل :

فرض طول الضلع الثالث Z

اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , Z

$5 + 12 > Z \Rightarrow 17 > Z$

الضلع الثالث أصغر من 17

$12 + Z > 5 \Rightarrow Z > 5 - 12 \Rightarrow Z > -7$

$5 + Z > 12 \Rightarrow Z > 12 - 5 \Rightarrow Z > 7$

[7] 8cm , 2cm

a) $6 \le x < 10$ b) $6 \le x \le 10$

c) $6 < x < 10$ d) $6 < x \le 10$

الحل :

فرض طول الضلع الثالث x

اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , x

$8 + 2 > x \Rightarrow 10 > x$

الضلع الثالث أصغر من 10

$8 + x > 2 \Rightarrow x > 2 - 8 \Rightarrow x > -6$

$2 + x > 8 \Rightarrow x > 8 - 2 \Rightarrow x > 6$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي $6 < x < 10$ الجواب فرع : (c)	المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < Z < 17$ الجواب فرع : (a)

اكتب متباينات التي تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

[8] a) $-4 < x < 3$ b) $-4 \le x < 3$ c) $-4 \le x \le 3$ d) $-4 < x \le 3$ الجواب فرع : (a)	[9] a) $y \le -3$ أو $y > 5$ b) $y \le -3$ أو $y \ge 5$ c) $y < -4$ أو $y \ge 5$ d) $y < -3$ أو $y > 5$ الجواب فرع : (c)

واجب

$x + 15 < 22$ او $50x + 15 \ge 30$

الدرس [5 – 1] : المتباينات المركبة

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| < a$, $|g(x)| \le a$ حيث $a \in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و) . بصورة عامة :

$$|g(x)| \le a \Rightarrow -a \le g(x) \le a \quad , \quad a > 0$$
$$|g(x)| < a \Rightarrow -a < g(x) < a \quad , \quad a > 0$$

سؤال : درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة . اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانياً .

الحل : نفرض درجة حرارة الماء هي x درجة سيليزية .

$x \ge 25 - 1$ و $x \le 25 + 1$

$x - 25 \ge -1$ و $x - 25 \le 1 \Rightarrow |x - 25| \le 1$

سؤال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1) $|x + 6| < 3$

الحل :

$-3 < x + 6 < 3 \implies -3 - 6 < x < 3 - 6 \implies -9 < x < -3$

$S = \{x : -9 < x < -3\}$

2) $|y| - 5 \leq 1$

$|y| \leq 1 + 5 \implies |y| \leq 6 \implies -6 \leq y \leq 6$

$S = \{y : -6 \leq y \leq 6\}$

سؤال : جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية :

1) $|2x - 5| + 3 < 11$

الحل :

$|2x - 5| < 11 - 3 \implies |2x - 5| < 8 \implies -8 < 2x - 5 < 8$

$-8 + 5 < 2x < 8 + 5 \implies -3 < 2x < 13 \} \div 2$

$\frac{-3}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{13}{2} \implies \frac{-3}{2} < x < \frac{13}{2} \implies S = \left\{x : \frac{-3}{2} < x < \frac{13}{2}\right\}$

2) $|7 - y| < 8$

الحل :

$-8 < 7 - y < 8 \implies -8 - 7 < -y < 8 - 7$

$-15 < -y < 1 \ ] \times (-1)$

$-1 < y < 15 \implies S = \{y : -1 < y < 15\}$

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| > a$, $|g(x)| \geq a$ **حيث** $a \in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي متباينة مركبة تتضمن (أو) . بصورة عامة :

$|g(x)| \geq a \iff g(x) \geq a$ أو $g(x) \leq -a$, $a > 0$

$|g(x)| > a \iff g(x) > a$ أو $g(x) < -a$, $a > 0$

سؤال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

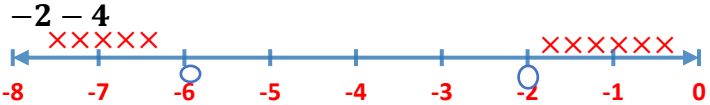
1) $|x + 4| > 2$

الحل :

$x + 4 > 2$ أو $x + 4 < -2 \implies x > 2 - 4$ أو $x < -2 - 4$

$x > -2$ أو $x < -6$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > -2\} \cup \{x : x < -6\}$



2) $|5y - 1| \geq 4$

الحل :

$5y - 1 \geq 4$ أو $5y - 1 \leq -4$

$5y \geq 4 + 1$ أو $5y \leq -4 + 1$

$5y \geq 5$ أو $5y \leq -3 \Rightarrow \frac{5y}{5} \geq \frac{5}{5}$ أو $\frac{5y}{5} \leq -\frac{3}{5}$

$y \geq 1$ أو $y \leq -\frac{3}{5}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \geq 1\} \cup \left\{y : y \leq -\frac{3}{5}\right\}$

سؤال : جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية :

1) $\left|\frac{2t - 8}{4}\right| \geq 9$

الحل :

$\frac{2t - 8}{4} \geq 9$ أو $\frac{2t - 8}{4} \leq -9$ $\} \times 4$

$2t - 8 \geq 36$ أو $2t - 8 \leq -36$

$2t \geq 36 + 8$ أو $2t \leq -36 + 8$

$2t \geq 44$ أو $2t \leq -28$ $\} \div 2$

$t \geq 22$ أو $t \leq -14$

$S = S_1 \cup S_2 = \{t : t \geq 22\} \cup \{t : t \leq -14\}$

2) $\left|\frac{5 - 3v}{2}\right| \geq 6$

الحل :

$\frac{5 - 3v}{2} \geq 6$ أو $\frac{5 - 3v}{2} \leq -6$ $\} \times 2$

$5 - 3v \geq 12$ أو $5 - 3v \leq -12$

$-3v \geq 12 - 5$ أو $-3v \leq -12 - 5$

$-3v \geq 7$ أو $-3v \leq -17$ $\} \div (-3)$

$v \leq -\frac{7}{3}$ أو $v \geq \frac{17}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{v : v \leq -\frac{7}{3}\right\} \cup \left\{v : v \geq \frac{17}{3}\right\}$

سؤال : في تحليلات دم الأنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5 - 5.3)\ mol/L$. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الأنسان .

الحل :

نفرض البوتاسيوم x

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واقل من القيمة الدنيا للمعدل هي : $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واكبر من القيمة العليا للمعدل هي : $x > 5.3$

المتباينة المركبة : $x > 5.3$ أو $x < 3.5$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم

نجد منتصف المسافة بين النقطتين : $\frac{3.5+5.3}{2} = \frac{8.8}{2} = 4.4$

نطرح نصف قطر المسافة من المتباينة :

$x > 5.3$ أو $x < 3.5 \quad \Rightarrow \quad x - 4.4 > 5.3 - 4.4$ أو $x - 4.4 < 3.5 - 4.4$

$x - 4.4 > 0.9$ أو $x - 4.4 < -0.9 \quad \Rightarrow \quad |x - 4.4| > 0.9$

تأكد من فهمك

سؤال : اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية :

1) تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق 22° سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 2° سيليزية .

الحل :

نفرض درجة الحرارة x

المتباينة المركبة تكون بالصورة :

$x \geq 22 - 2$ و $x \leq 22 + 2$

$x - 22 \geq -2$ و $x - 22 \leq 2$

$|x - 22| \leq 2$

2) الزاوية القائمة تتحول الى زاوية حادة أو منفرجة اذا تحرك مؤشر الزاوية الى اليمين أو الى اليسار في الأقل درجة واحدة .

الحل :

نفرض الزاوية x قياس الزاوية القائمة 90

المتباينة المركبة تكون بالصورة :

$x \geq 90 - 1$ و $x \leq 90 + 1$

$x - 90 \geq -1$ و $x - 90 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x - 90| \leq 1$

سؤال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1) $|x + 1| < 5$

الحل :

$-5 < x + 1 < 5 \quad \Rightarrow \quad -5 - 1 < x < 5 - 1$

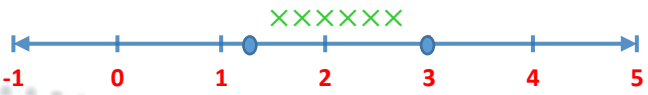
$-6 < x < 4 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -6 < x < 4\}$

2) $|3Z - 7| \leq 2$

الحل :

$-2 \leq 3Z - 7 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -2 + 7 \leq 3Z \leq 2 + 7$

$5 \leq 3Z \leq 9 \;\} \div 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{3} \leq \frac{3Z}{3} \leq \frac{9}{3}$



$\frac{5}{3} \leq Z \leq 3 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{Z : \frac{5}{3} \leq Z \leq 3\right\}$

3) $|x| + 8 < 9$

الحل :

$|x| < 9 - 8 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$

$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -1 < x < 1\}$

4) $|5y| - 2 \leq 8$

الحل :

$|5y| \leq 8 + 2 \quad \Rightarrow \quad |5y| \leq 10$

$-10 \leq 5y \leq 10 \;\} \div 5 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq y \leq 2$

$S = \{y : -2 \leq y \leq 2\}$

$|3x| - 5 \leq 7$ واجب

5) $|x + 4| > 6$

الحل :

$x + 4 > 6$ أو $x + 4 < -6 \quad \Rightarrow \quad x > 6 - 4$ أو $x < -6 - 4$

$x > 2$ أو $x < -10$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -10\}$

6) $|5Z - 9| > 1$

الحل :

SOL : $5Z - 9 > 1$ أو $5Z - 9 < -1 \Rightarrow 5Z > 1 + 9$ أو $5Z < -1 + 9$

$5Z > 10$ أو $5Z < 8 \} \div 5 \Rightarrow Z > 2$ أو $Z < \frac{8}{5} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 2\} \cup \left\{Z : Z < \frac{8}{5}\right\}$

7) $|2x| + 7 \geq 8$

الحل :

$|2x| \geq 8 - 7 \Rightarrow |2x| \geq 1$

$2x \geq 1$ أو $2x \leq -1 \} \div 2$

$x \geq \frac{1}{2}$ أو $x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \geq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

8) $|4y| - 2 > 3$

الحل :

$|4y| > 3 + 2 \Rightarrow |4y| > 5$

$4y > 5$ أو $4y < -5 \} \div 4$

$y > \frac{5}{4}$ أو $y < \frac{-5}{4} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y > \frac{5}{4}\right\} \cup \left\{y : y < \frac{-5}{4}\right\}$

9) $|5 - x| < 10$

الحل :

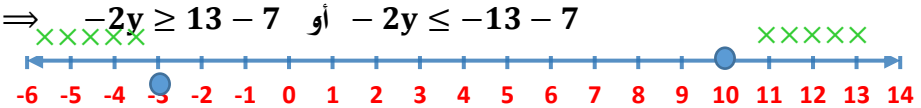
$-10 < 5 - x < 10 \Rightarrow -10 - 5 < -x < 10 - 5$

$-15 < -x < 5 \quad] \times (-1)$

$15 > x > -5 \Rightarrow S = \{x : 15 > x > -5\}$

10) $|7 - 2y| \geq 13$

الحل :



$y - 2y \geq 13$ أو $7 - 2y \leq -13 \Rightarrow -2y \geq 13 - 7$ أو $-2y \leq -13 - 7$

$-2y \geq 6$ أو $-2y \leq -20 \} \div (-2)$

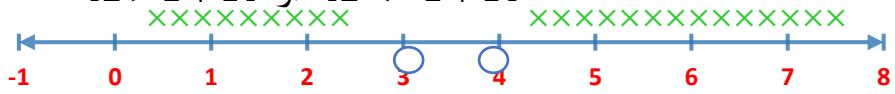
$y \leq -3$ أو $y \geq 10 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -3\} \cup \{y : y \geq 10\}$

11) $|4Z - 14| > 2$

الحل :

$4Z - 14 > 2$ أو $4Z - 14 < -2 \implies 4Z > 2 + 14$ أو $4Z < -2 + 14$

$4Z > 16$ أو $4Z < 12 \} \div 4$



$Z > 4$ or $Z < 3 \implies S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 4\} \cup \{Z : Z < 3\}$

$|2y| - 2 > 4$ واجب

أو

$|6x| + 4 < 10$

و

$|y - 4| \leq 4$ واجب

12) $\left|\frac{x - 12}{4}\right| \leq 9$

الحل :

$-9 \leq \frac{x - 12}{4} \leq 9 \} \times 4 \implies -36 \leq x - 12 \leq 36$

$-36 + 12 \leq x \leq 36 + 12 \implies -24 \leq x \leq 48 \implies S = \{x : -24 \leq x \leq 48\}$

13) $\left|\frac{6 - 2y}{4}\right| \geq 9$

الحل :

$\frac{6 - 2y}{4} \geq 9$ أو $\frac{6 - 2y}{4} \leq -9 \} \times 4 \implies 6 - 2y \geq 36$ أو $6 - 2y \leq -36$

$-2y \geq 36 - 6$ أو $-2y \leq -36 - 6 \implies -2y \geq 30$ أو $-2y \leq -42$ $\} \div (-2)$

$y \leq -15$ أو $y \geq 21 \implies S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -15\}$

$|4z - 14| > 2$

واجب

أ. رشيد عبد الله اللهيبي
مدرس رياضيات

تدرب وحل التمرينات

سؤال : كتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية :

1) يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة $8°$ سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز $0.5°$ سيليزية . اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة ؟

الحل : نفرض درجة الحرارة المثالية x

$x \leq 8 + 0.5$ و $x \geq 8 - 0.5$

$x - 8 \leq 0.5$ و $x - 8 \geq -0.5$

$0.5 \leq x - 8 \leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad |x - 8| \leq 0.5$

2) درجة غليان الماء $100°$ سليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز $20°$ سليزية . اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء .

الحل : نفرض درجة غليان الماء x

$x \leq 100 + 20$ و $x \geq 100 - 20$

$x - 100 \leq 20$ و $x - 100 \geq -20 \quad \Rightarrow \quad -20 \leq x - 100 \leq 20$

$|x - 100| \leq 20$

سؤال : حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

1) $|x + 3| < 6$

الحل :

$-6 < x + 3 < 6 \quad \Rightarrow \quad -6 - 3 < x < 6 - 3$

$-9 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -9 < x < 3\}$

2) $|x| - 6 < 5$

الحل :

$|x| < 5 + 6 \quad \Rightarrow \quad |x| < 11$

$-11 < x < 11 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -11 < x < 11\}$

3) $|2Z| - 5 < 2$

الحل :

$|2Z| < 2 + 5 \quad \Rightarrow \quad |2Z| < 7 \quad \Rightarrow \quad -7 < 2Z < 7 \} \div 2$

$\frac{-7}{2} < Z < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{Z : \frac{-7}{2} < Z < \frac{7}{2}\right\}$

4) $|y-3| \geq \frac{1}{3}$

الحل :

$y-3 \geq \frac{1}{3}$ أو $y-3 \leq -\frac{1}{3}$ $\} \times 3$

$3y-9 \geq 1$ أو $3y-9 \leq -1$

$3y \geq 1+9$ أو $3y \leq -1+9$ $\Rightarrow$ $3y \geq 10$ أو $3y \leq 8$ $\} \div 3$

$y \geq \frac{10}{3}$ أو $y \leq \frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \geq \frac{10}{3}\right\} \cup \left\{y : y \leq \frac{8}{3}\right\}$

5) $2|x|-7 \geq 1$

الحل :

$2|x| \geq 1+7$ $\Rightarrow$ $2|x| \geq 8$ $\} \div 2$

$|x| \geq 4$ $\Rightarrow$ $x \geq 4$ أو $x \leq -4$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 4\} \cup \{x : x \leq -4\}$

6) $|9y|-6 > 3$

الحل :

$|9y| > 3+6$ $\Rightarrow$ $|9y| > 9$ $\Rightarrow$ $9y > 9$ أو $9y < -9$ $\} \div 9$

$y > 1$ أو $y < -1$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{y : y > 1\} \cup \{y : y < -1\}$

7) $|11Z|-2 \geq 9$

الحل :

$|11Z| \geq 9+2$ $\Rightarrow$ $|11Z| \geq 11$ $\Rightarrow$ $11Z \geq 11$ أو $11Z \leq -11$ $\} \div 11$

$Z \geq 1$ أو $Z \leq -1$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z \geq 1\}$

8) $|1-x| < 1$

الحل :

$-1 < 1-x < 1$ $\Rightarrow$ $-1-1 < -x < 1-1$ $\Rightarrow$ $-2 < -x < 0$ $\} \times (-1)$

$0 < x < 2$ $\Rightarrow$ $S = \{x : 0 < x < 2\}$

9) $\left|\frac{4}{5}Z-1\right| > \frac{4}{5}$

الحل :

$\frac{4}{5}Z-1 > \frac{4}{5}$ أو $\frac{4}{5}Z-1 < -\frac{4}{5}$ $\} \times 5$

$4Z-5 > 4$ أو $4Z-5 < -4$ $\Rightarrow$ $4Z > 4+5$ أو $4Z < -4+5$

$4Z > 9$ أو $4Z < 1$ $\} \div 4$ $\Rightarrow$ $Z > \frac{9}{4}$ أو $Z < \frac{1}{4}$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{Z : Z > \frac{9}{4}\right\} \cup \left\{Z : Z < \frac{1}{4}\right\}$$

10) $\left|\frac{Z-1}{7}\right| \leq 2$

الحل :

$$-2 \leq \frac{Z-1}{7} \leq 2 \quad \} \times 7$$

$$-14 \leq Z-1 \leq 14 \implies -14+1 \leq Z \leq 14+1$$

$$-13 \leq Z \leq 15 \implies S = \{Z : -13 \leq Z \leq 15\}$$

سؤال : اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :

1)

الحل : الرسم البياني يمثل تقاطع (و) والفجوة فارغة .

المتباينة $-6 < x < 2$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ ثم نطرح (-2) من جميع المتباينة :

$$-6 < x < 2 \implies -6-(-2) < x-(-2) < 2-(-2)$$

$$-4 < x+2 < 4 \implies |x+2| < 4$$

2)

الحل : الرسم البياني يمثل التقاطع (و)

المتباينة $-4 \leq x \leq 2$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ثم نطرح (-1) من جميع المتباينة :

$$-4 \leq x \leq 2 \implies -4-(-1) \leq x-(-1) \leq 2-(-1)$$

$$-3 \leq x+1 \leq 3 \implies |x+1| \leq 3$$

3)

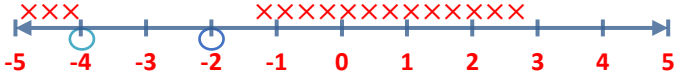
الحل : الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

المتباينة $x > -2$ أو $x < 4$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ثم نطرح (1) من جميع المتباينة :

$$x > -2 \text{ أو } x < 4 \implies x-1 > -2-1 \text{ أو } x-1 < 4-1$$

$$x-1 > -3 \text{ أو } x-1 < 3 \implies |x-1| > 3$$



4)

الحل : الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

المتباينة $x \geq -4$ أو $x \leq -2$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ ثم نطرح (-3) من جميع المتباينة :

$x \geq -4$ أو $x \leq -2 \quad \Rightarrow \quad x - 3 \geq -4 - (3)$ أو $x - 3 \leq -2 - (-3)$

$x - 3 \geq -1$ أو $x - 3 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x - 3| \geq 1$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي :

1) **الغرير** : حيوان الغرير هو أحد أنواع الثدييات ينتمي الى شعبة الحبليات ويمتلك قوائم قصيرة نوعا ما ويعيش في الحفر التي يحفرها في الأرض طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل ما بين 68cm , 76cm . اكتب مدى طول الغرير .

الحل : نفرض طول الغرير x

المتباينة $68 < x < 76$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{68+76}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ثم نطرح (72) من جميع المتباينة :

$68 < x < 76 \quad \Rightarrow \quad 68 - 72 < x - 72 < 76 - 72$

$-4 < x - 72 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x - 72| < 4$

2) **صحة** : معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح بين 60 الى 90 نبضة في الدقيقة . اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الانسان .

الحل : نفرض عدد دقات القلب غير الطبيعية x

المتباينة $x < 60$ أو $x > 90$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{60+90}{2} = \frac{150}{2} = 75$ ثم نطرح (75) من جميع المتباينة :

$x < 60$ أو $x > 90 \quad \Rightarrow \quad x - 75 < 60 - 75$ أو $x - 75 > 90 - 75$

$x < -15$ أو $x > 15 \quad \Rightarrow \quad |x - 75| > 4$

3) **مواصلات** : تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح ما بين 8km الى 10km اذ تعد منطقة جوية معتدلة . اكتب مدى منطقة الطيران المدنية .

الحل : نفرض مدى منطقة الطيران x

المتباينة $8 < x < 10$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ثم نطرح (9) من جميع المتباينة :

$8 < x < 10 \quad \Rightarrow \quad 8 - 9 < x - 9 < 10 - 9$

$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad |x - 9| < 1$

فـــكـــر

سؤال : **تحد :** حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1) $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \le \sqrt{6}$

الحل :

$$-\sqrt{6} \le \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \le \sqrt{6} \quad \} \times \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{12} \le \sqrt{3}x + \sqrt{3} \le \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{3} \le \sqrt{3}x + \sqrt{3} \le 2\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3} - \sqrt{3} \le \sqrt{3}x \le 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{3} \le \sqrt{3}x \le \sqrt{3} \quad \} \div \sqrt{3}$$

$$-1 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -1 \le x \le 1\}$$

2) $\left|\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}}\right| \ge \sqrt{15}$

الحل :

$$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \ge \sqrt{15} \text{ أو } \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \le -\sqrt{15} \quad \} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{3}y \ge \sqrt{75} \text{ أو } \sqrt{12} - \sqrt{3}y \le -\sqrt{75}$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \ge 5\sqrt{3} \text{ أو } 2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \le -5\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y \ge 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \text{ أو } -\sqrt{3}y \le -5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y \ge 3\sqrt{3} \text{ أو } -\sqrt{3}y \le -7\sqrt{3} \quad \} \div (-\sqrt{3})$$

$$y \le -3 \text{ أو } y \ge 7$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \le -3\} \cup \{y : y \ge 7\}$$

سؤال : **صحح الخطأ :** قالت خلود أن متباينة القيمة المطلقة $|6 - 3y| \ge 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و)

ومجموعة الحل لها : $\left\{y : -\frac{1}{3} \le y \le \frac{13}{2}\right\}$. بين خطأ خلود وصححه .

الحل : المتباينة تمثل متباينة مركبة بعلاقة (أو)

$$6 - 3y \ge 7 \text{ أو } 6 - 3y \le -7 \quad \Rightarrow \quad -3y \ge 7 - 6 \text{ أو } -3y \le -7 - 6$$

$$-3y \ge 1 \text{ أو } -3y \le -13 \quad \} \div (-3)$$

$$y \le \frac{-1}{3} \text{ أو } y \ge \frac{13}{3} \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \le -\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{y : y \ge \frac{13}{3}\right\}$$

سؤال : **حس عددي :** اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية :

1) $|Z| - 1 < 0$

الحل :

$|Z| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < Z < 1$

$S = \{Z : -1 < Z < 1\}$

2) $|y| > 0$

الحل :

$y > 0$ أو $y < 0$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y > 0\} \cup \{y : y < 0\}$

3) $|x - 1| > 0$

الحل :

$x - 1 > 0$ أو $x - 1 < 0 \Rightarrow x > 1$ أو $x < 1$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 1\} \cup \{x : x < 1\}$

واجب $|x + 4| > 2$

سؤال : **أكتب :** متباينة قيمة مطلقة تمثل موقفاً من واقع الحياة ومثل الحل على مستقيم الأعداد .

الحل : مسألة : الضغط الدم الطبيعي لدى الأنسان يتراوح بين 120 الى 180 . أحسب مدى ضغط الدم غير الطبيعي .

نفرض مدى ضغط الدم هو x

المتباينة التي تمثل ضغط الدم غير الطبيعي هي :

$x > 180$ أو $x < 120$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{120+180}{2} = \frac{300}{2} = 150$ ثم نطرح (150) من جميع المتباينة :

$x - 150 > 180 - 150$ أو $x - 150 < 120 - 150$

$x - 150 > 30$ أو $x - 150 < -30$

$|x - 150| > 30$

مراجعة الفصل

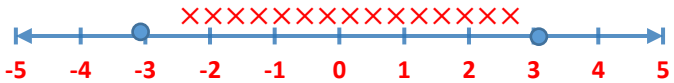
تدريب 1 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $|3y| - 1 \leq 8$

الحل :

$|3y| \leq 8 + 1 \quad \Rightarrow \quad |3y| \leq 9$

$-9 \leq 3y \leq 9 \ \} \div 3$

$-3 \leq y \leq 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{y : -3 \leq y \leq 3\}$



تدريب 2 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $\left|\frac{6-2x}{8}\right| \geq 3$

الحل :

$$\frac{6-2x}{8} \geq 3 \text{ أو } \frac{6-2x}{8} \leq -3 \} \times 8$$

$$6-2x \geq 24 \text{ أو } 6-2x \leq -24 \implies -2x \geq 24-6 \text{ أو } -2x \leq -24-6$$

$$-2x \geq 18 \text{ أو } -2x \leq -30 \} \div (-2)$$

$$x \leq -9 \text{ أو } x \geq 15$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \leq -9\} \cup \{x : x \geq 15\}$$

مثال 1 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $|x+1| < 5$

الحل :

$$-5 < x+1 < 5 \implies -5-1 < x < 5-1$$

$$-6 < x < 4 \implies S = \{x : -6 < x < 4\}$$

مثال 2 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $\left|\frac{3z-9}{6}\right| \geq 1$

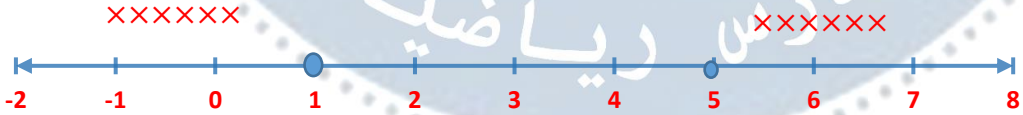
الحل :

$$\frac{3Z-9}{6} \geq 1 \text{ أو } \frac{3Z-9}{6} \leq -1 \} \times 6$$

$$3Z-9 \geq 6 \text{ أو } 3Z-9 \leq -6 \implies 3Z \geq 6+9 \text{ أو } 3Z \leq -6+9$$

$$3Z \geq 15 \text{ أو } 3Z \leq 3 \} \div 3 \implies Z \geq 5 \text{ أو } Z \leq 1$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z \geq 5\} \cup \{Z : Z \leq 1\}$$



اختبار الفصل

سؤال : حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

1) $|x-6| \le 3$

الحل :

$-3 \le x-6 \le 3 \implies -3+6 \le x \le 3+6$

$3 \le x \le 9 \implies S = \{x : 3 \le x \le 9\}$

2) $|3Z| - 5 < 4$

الحل :

$|3Z| < 4+5 \implies |3Z| < 9$

$-9 < 3Z < 9 \ \} \div 3$

$-3 < Z < 3 \implies S = \{Z : -3 < Z < 3\}$

3) $6|x| - 8 \ge 3$

الحل :

$6|x| \ge 3+8 \implies 6|x| \ge 11 \ \} \div 6$

$|x| \ge \frac{11}{6} \implies x \ge \frac{11}{6}$ أو $x \le \frac{-11}{6}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \ge \frac{11}{6}\right\} \cup \left\{x : x \le \frac{-11}{6}\right\}$

4) $|x+1| > \frac{1}{2}$

الحل :

$x+1 > \frac{1}{2}$ أو $x+1 < -\frac{1}{2} \ \} \times 2$

$2x+2 > 1$ أو $2x+2 < -1$

$2x > 1-2$ أو $2x < -1-2$

$2x > -1$ أو $2x < -3 \ \} \div 2$

$x > -\frac{1}{2}$ أو $x < -\frac{3}{2}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x > -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$

5) $|3y| - 2 > 9$

الحل :

$|3y| > 9+2 \implies |3y| > 11$

$3y > 11$ أو $3y < -11 \ \} \div 3$

$y > \frac{11}{3}$ أو $y < -\frac{11}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y > \frac{11}{3}\right\} \cup \left\{y : y < -\frac{11}{3}\right\}$

6) $|8Z| - 1 \ge 8$

الحل :

$|8Z| \ge 8+1 \implies |8Z| \ge 9$

$8Z \ge 9$ أو $8Z \le -9 \ \} \div 8$

$Z \ge \frac{9}{8}$ أو $Z \le -\frac{9}{8}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{Z : Z \ge \frac{9}{8}\right\} \cup \left\{Z : Z \le -\frac{9}{8}\right\}$

7) $|4-3y| \ge 14$

الحل :

$4-3y \ge 14$ أو $4-3y \le -14$

$-3y \ge 14-4$ أو $-3y \le -14-4$

$-3y \ge 10$ أو $-3y \le -18 \ \} \div (-3)$

$y \le -\frac{10}{3}$ أو $y \ge 6$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \le -\frac{10}{3}\right\} \cup \{y : y \ge 6\}$

31 $\left|\frac{6-3y}{9}\right| \ge 5$

الحل :

$\frac{6-3y}{9} \ge 5$ أو $\frac{6-3y}{9} \le -5 \ \} \times 9$

$6-3y \ge 45$ أو $6-3y \le -45 \implies -3y \ge 45-6$ أو $-3y \le -45-6$

$-3y \ge 39$ أو $-3y \le -51 \ \} \div (-3)$

$y \le -13$ أو $y \ge 17 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2$ $= \{y : y \le -13\} \cup \{y : y \ge 17\}$	

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

[1] $|y - 8| < 13$

a) $5 < y < -21$ b) $-5 \le y \le -21$

c) $-5 < y < 21$ d) $-5 < y \le 21$

الحل :

$-13 < y - 8 < 13 \Rightarrow -13 + 8 < y < 13 + 8$

$-5 < y < 21 \Rightarrow S = \{y : -5 < y < 21\}$

الجواب فرع : (c)

[2] $|3Z| - 7 < 1$

a) $-\frac{8}{3} \le Z < \frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3} < Z \le \frac{8}{3}$

c) $-\frac{8}{3} \le Z \le \frac{8}{3}$ d) $-\frac{8}{3} < Z < \frac{8}{3}$

الحل :

$|3Z| < 1 + 7 \Rightarrow |3Z| < 8 \Rightarrow -8 < 3Z < 8$

$\frac{8}{3} < \frac{3Z}{3} < \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{8}{3} < Z < \frac{8}{3}$

$S = \left\{Z : -\frac{8}{3} < Z < \frac{8}{3}\right\}$

الجواب فرع : (d)

[3] $|3 - x| < 3$

a) $-6 < x < 0$ b) $0 < x < 6$

c) $-6 < x < 6$ d) $0 \le x \le 6$

الحل :

$-3 < 3 - x < 3 \Rightarrow -3 - 3 < -x < 3 - 3$

$-6 < -x < 0 \} \times (-1) \Rightarrow 0 < x < 6$

الجواب فرع : (b)

[4] $|5t - 5| > 0$

a) $t \le 1$ أو $t > 1$ b) $t \ge 1$ أو $t < -1$

c) $t > 1$ أو $t < 1$ d) $t > -1$ أو $t < -1$

الحل :

$5t - 5 > 0$ أو $5t - 5 < 0$

$5t > 5$ أو $5t < 5 \} \div 5 \Rightarrow t > 1$ أو $t < 1$

الجواب فرع : (c)

[5] $|v - 3| \ge \frac{1}{2}$

a) $v \le \frac{7}{2}$ أو $v \le -\frac{5}{2}$ b) $v \ge \frac{7}{2}$ أو $v \ge -\frac{5}{2}$

c) $v \ge \frac{7}{2}$ أو $v \le \frac{5}{2}$ d) $v \le \frac{7}{2}$ أو $v \ge -\frac{5}{2}$

الحل :

$v - 3 \ge \frac{1}{2}$ أو $v - 3 \le \frac{-1}{2}$

$v \ge \frac{1}{2} + 3$ أو $v \le \frac{-1}{2} + 3$

[6] $|6 - 3y| \ge 9$

a) $y \le 1$ أو $y \ge -5$ b) $y < -1$ أو $y > 5$

c) $y > -1$ أو $y < -5$ d) $y \le -1$ أو $y \ge 5$

الحل :

$6 - 3y \ge 9$ أو $6 - 3y \le -9$

$-3y \ge 9 - 6$ أو $-3y \le -9 - 6$

$-3y \ge 3$ أو $-3y \le -15 \} \div (-3)$

$y \leq -1$ أو $y \geq 5$

الجواب فرع : (d)

$v \geq \frac{1+6}{2}$ أو $v \leq \frac{-1+6}{2} \Rightarrow v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{5}{2}$

الجواب فرع : (c)

[7] $\left|\frac{7-2y}{3}\right| \geq 3$

a) $y \leq -1$ أو $y \geq 8$

b) $y < -1$ أو $y \geq 8$

c) $y < -1$ أو $y > 8$

d) $y < -1$ أو $y > 8$

الحل :

$\frac{7-2y}{3} \geq 3$ أو $\frac{7-2y}{3} \leq -3$ $\} \times 3$

$7 - 2y \geq 9$ أو $7 - 2y \leq -9$

$-2y \geq 9 - 7$ أو $-2y \leq -9 - 7$

$-2y \geq 2$ أو $-2y \leq -16$ $\} \div (-2)$

$y \leq -1$ أو $y \geq 8$

الجواب فرع : (a)

[8] $\left|\frac{Z-1}{7}\right| \leq 2$

a) $-13 < Z \leq 15$

b) $-13 \leq Z < 15$

c) $-13 \leq Z \leq 15$

d) $-13 < Z < 15$

الحل :

$-2 \leq \frac{Z-1}{7} \leq 2$ $\} \times 7$

$-14 \leq Z - 1 \leq 14$

$-14 + 1 \leq Z \leq 14 + 1$

$-13 \leq Z \leq 15$

الجواب فرع : (c)

واجب

$4|x| - 5 \geq 3$

$|3x - 12| > 3$

الدرس [6 – 1] : خطة حل المسألة (أفهم المسألة)

سؤال : تعلم أظهرت دراسة مسحية أن 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم فاذا كان هامش الخطأ هو 4 نقاط . فجد مدى النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

أفهم : ما المعطيات في المسألة ؟ 62% من السباب يمارسون رياضة كرة القدم , هامش الخطأ هو 4 نقاط .

ما المطلوب من المسألة ؟ إيجاد مدى النسبة المئوية التي تمثل الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

خطط :

كيف تحل المسألة ؟ بما أن النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون كرة القدم هي 62% والنسبة الواردة في الدراسة أقل من أو يساوي 4% لذا : $|x - 62| \leq 4$ اذ x تمثل النسبة الفعلية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

حل : نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$$|x - 62| \leq 4 \implies -4 \leq x - 62 \leq 4$$

$$-4 + 62 \leq x \leq 4 + 62 \implies 58 \leq x \leq 66 \implies S = \{x : 58 \leq x \leq 66\}$$

تحقق : استعمل مستقيم الأعداد للتحقق من صحة الحل :

مسائل

سؤال : سمك السلمون : متوسط عمر سمك السلمون من سنتين الى ثماني سنوات كما أنه يكون مهددا بالخطر عند ارتفاع درجة حرارة المياه فهو يعيش في درجة حرارة تتراوح بين 20 درجة سيليزية الى 23 درجة . اكتب متباينة تمثل درجة المياه التي لا يعيش فيها سمك السلمون .

الحل : نفرض درجة حرارة المياه هي x

المتباينة التي تمثل درجة المياه التي لا يعيش فيه سمك السلمون هي :

$$x < 20 \text{ أو } x > 23$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x < 20\} \cup \{x : x > 23\}$$

سؤال : دب الباندا : الباندا العملاقة هو نوع مختلف عن باقي الدببة فهي تمتلك فروا يختلف لونه في بعض المناطق فجسمها كله أبيض عدا الأذنين والعينين والساقين والذراعين والكتفين فهي أسود وتلد الأنثى صغيرا واحدا أو اثنين ويحتاج الصغير الى حليب أمه لأكثر من (6 الى 14) مرة في اليوم صغار الباندا العملاقة تزن بين 40kg الى 60kg في عام واحد ويعيشون مع أمهاتهم حتى سنتين من العمر . اكتب متباينة تمثل وزن صغير الباندا عندما يكون عمره سنة واحدة

الحل : نفرض وزن صغير الباندا هو x

$40 < x < 60 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : 40 < x < 60\}$

سؤال : **خلية النحل :** لاحظ أنور من خلال دراسة مسحية على خلية نحل أن 88% من ذكور النحل يطردون من لخلية في نهاية الصيف فاذا كان هامش الخطأ 3 نقاط مئوية . جد مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يطردون من الخلية .

الحل : نفرض مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يطردون من الخلية هو x

$|x - 88| \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq x - 88 \leq 3 \quad \Rightarrow -3 + 88 \leq x \leq 3 + 88$

$85 \leq x \leq 91 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : 85 \leq x \leq 91\}$

سؤال : **التلفريك :** التلفريك أو المعبر الهوائي وهو من أرخص وأبسط وسائل النقل يعمل بالكهربء ويعد واسطة نقل في الدول التي تكثر فيها الجبال والأسطح الوعرة وتلجأ اليها بعض الدول أيضا كوسيلة للترفيه ومشاهدة المناظر كما في شمال العراق . أقل سرعة لعربات التلفريك $20\ km/h$ وأكبر سرعة $40\ km/h$. اكتب متباينة القيمة المطلقة تبين مدى سرعة عربات التلفريك ؟

الحل : نفرض سرعة عربات التلفريك هو x

$x \leq 40$ و $x \geq 20$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{20+40}{2} = \frac{60}{2} = 30$ ثم نطرح (30) من جميع المتباينة :

$x - 30 \leq 40 - 30$ و $x - 30 \geq 20 - 30$

$x - 30 \leq 10$ و $x - 30 \geq -10$

متباينة القيمة المطلقة هي : $|x - 30| \leq 10$

الفصل الثاني : المقادير الجبرية

الدرس [1-2] ضرب المقادير الجبرية

[2 – 1 – 1]	ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

- ✓ اذا كان المقدار يتكون من قوسين مختلفين فنقوم بتوزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة
- ✓ اذا كان المقدار بالصورة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$ فإن تبسيطه حسب قانون المربع الكامل :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- ✓ اذا كان المقدار بالصورة $(a-b)(a+b)$ فإن القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

سؤال جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3) $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

4) $(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$

5) $(x+2)(x-6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$

6) $(x-1)(x-4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين

1) $(3y+1)(y+2) = 3y^2 + 6y + y + 2 = 3y^2 + 7y + 2$

[2] $(n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3}) = 5n^2 - \sqrt{3}\,n - 5\sqrt{3}n + 3 = 5n^2 - 6\sqrt{3}\,n + 3$

[3] $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

[8] $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

[5] $(Z+3)^2 = Z^2 + 6Z + 9$

[6] $(h-5)^2 = h^2 - 10h + 25$

[7] $(2x-7)(2x+7) = (2x)^2 - (7)^2 = 4x^2 - 49$

[8] $(v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2 = v^2 - 2$

[2 – 1 – 2] ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

[1] اذا كان المقدار يتكون من قوسين احدهما من حدين والآخر من ثلاثة حدود هنالك طريقتين :

a) نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نطرح الحدود المتشابهة .

b) اذا كان المقدار بالصورة :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$1=1^3\ ,8=2^3$
$27=3^3$
$64=4^3$
$125=5^3$
$216=6^3$

[2] اذا كان المقدر بالشك : $(a-b)^3\ ,(a+b)^3$ نقوم بتبسيطه بالشكل التالي :

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2\ ,(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$$

نقوم بتبسيط القوس الذي يحتوي على التربيع أولاً ثم نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نجمع الحدود المتشابهة .

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

1 $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8=x^3+8$ — الطريقة الأولى

$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$ — الطريقة الثانية

2 $(y-3)(y^2+3y+9)=y^3-3^3=y^3-27$

3 $(2v+5)(4v^2-10v+25)=(2v)^3+5^3=8v^3+125$

4 $\left(\frac{1}{3}-Z\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}Z+Z^2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-Z^3=\frac{1}{27}-Z^3$

5 $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}+v\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}-\sqrt[3]{\frac{3}{5}}v+v^2\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)^3-v^3=\frac{3}{5}+v^3$

6 $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})=x^3-(\sqrt[3]{2})^3=x^3-2$

7 $(y+2)^3=(y+2)(y+2)^2=(y+2)(y^2+4y+4)=y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8$

$=y^3+6y^2+12y+8$

8 $(Z-3)^3=(Z-3)(Z-3)^2=(Z-3)(Z^2-6Z+9)=$

$=Z^3-6Z^2+9Z-3Z^2+18Z-27=Z^3-9Z^2+27Z-27$

9 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$

$=x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

10 $(y-5)^3=(y-5)(y-5)^2=(y-5)(y^2-10y+25)$

$=y^3-10y^2+25y-5y^2+50y-125=y^3-15y^2+75y-125$

2019/أول1

تأكد من فهمك

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

2021/دور2

1 $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

2 $(\sqrt{7} - h)^2 = 7 - 2\sqrt{7}\,h + h^2$

3 $(Z+\sqrt{5})(Z-\sqrt{5}) = Z^2 - (\sqrt{5})^2 = Z^2 - 5$

4 $(v+5)(v+1) = v^2 + v + 5v + 5 = v^2 + 6v + 5$

5 $(x-3)(x-2) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$

6 $(3x-4)(x+5) = 3x^2 + 15x - 4x - 20 = 3x^2 + 11x - 20$

7 $\left(\frac{1}{3}y + 3\right)\left(\frac{1}{3}y + 3\right) = \frac{1}{9}y^2 + y + y + 9 = \frac{1}{9}y^2 + 2y + 9$

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

1 $(y+2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 2^3 = y^3 + 8$

2 $(2Z+4)(4Z^2 - 8Z + 16) = (2Z)^3 + 4^3 = 8Z^3 + 64$

1دور/2023

3 $(v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}\,v + \sqrt[3]{9}) = v^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = v^3 - 3$

4 $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\,m + m^2\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3 + m^3 = \frac{2}{7} + m^3$

5 $(x+5)^3 = (x+5)(x+5)^2 = (x+5)(x^2 + 10x + 25)$

$= x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

6 $(y-4)^3 = (y-4)(y-4)^2 = (y-4)(y^2 - 8y + 16)$

$= y^3 - 8y^2 + 16y - 4y^2 + 32y - 64 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1 $(n-6)^2 = n^2 - 12n + 36$

2 $(y+5)(y-5) = y^2 - 5^2 = y^2 - 25$

3 $(x+\sqrt{8})^2 = x^2 + 2\sqrt{8}\,x + 8$

4 $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6}) = y^2 - (\sqrt{6})^2 = y^2 - 6$

5 $(8+h)(3+h) = 24+8h+3h+h^2 = 24+11h+h^2$

6 $(4-y)(5-y) = 20-4y-5y+y^2 = 20-9y+y^2$

7 $(2x-3)(x+9) = 3x^2+27x-3x-27 = 3x^2-24x-27$

8 $(Z-2\sqrt{7})(2Z-\sqrt{7}) = 2Z^2-\sqrt{7}\,Z-4\sqrt{7}\,Z+14 = 2Z^2-5\sqrt{7}\,Z+14$

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

1 $(x+6)(x^2-6x+36) = x^3+6^3 = x^3+216$

2 $(y-1)(y^2+y+1) = y^3-1^3 = y^3-1$

3 $(Z-3)^3 = (Z-3)(Z-3)^2 = (Z-3)(Z^2-6Z+9)$

$= Z^3-6Z^2+9Z-3Z^2+18Z-27 = Z^3-9Z^2+27Z-27$

4 $\left(\frac{2}{3}-r\right)\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}r+r^2\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3-r^3 = \frac{8}{27}-r^3$

5 $(x-\sqrt[3]{4})(x^2+\sqrt[3]{4}\,x+\sqrt[3]{16}) = x^3-(\sqrt[3]{4})^3 = x^3-4$

6 $(Z-\sqrt{5})^3 = (Z-\sqrt{5})(Z-\sqrt{5})^2 = (Z-\sqrt{5})(Z^2-2\sqrt{5}\,Z+5)$

$= Z^3-2\sqrt{5}\,Z^2+5Z-\sqrt{5}\,Z^2+10Z-5\sqrt{5} = Z^3-3\sqrt{5}\,Z^2+15Z-5\sqrt{5}$

7 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+n\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{25}}+\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\,n+n^2\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3+n^3 = \frac{1}{5}+n^3$

8 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\frac{1}{h}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\,\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3+\left(\frac{1}{h}\right)^3 = \frac{1}{9}+\frac{1}{h^2}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **مسبح :** يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد يبلغ طول المسبح فيه $(x+9)$ امتار وعرضه $(x+1)$ متر ومحاط بممر عرضه 1 متر . اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة .

الحل :

الطول $x+9+1+1 = x+11$, العرض $x+1+1+1 = x+3$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$A = (x+11)(x+3) = x^2+3x+11x+33 = x^2+14x+33$

سؤال : **تأريخ :** تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريبا . وقد بنوا سنة 575 م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل . رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد $(y-4),(y-7)$ سنتمترات . اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة .

الحل :

مساحة اللوحة = الطول × العرض

$$A=(y-4)(y-7)=y^2-7y-4y+28=y^2-11y+2$$

سؤال : **أسماك زينة :** حوض سمك زينة مكعب الشكل طول ضلعه $(v+3)$ سنتمتر . اكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة .

الحل :

$$V=L^3=(v+3)^3=(v+3)(v+3)^2=(v+3)(v^2+6v+9)$$
$$=v^3+6v^2+9v+3v^2+18v+27=v^3+9v^2 27v+27$$

سؤال : **تحد :** جد ناتج كل مما يلي بأبسط صورة :

1) $(x+1)^2-(x-2)^2=x^2+2x+1-(x^2-4x+4)=x^2+2x+1-x^2+4x-4=6x-3$

2) $(3y+2)(y-5)-(3y^2-10)=3y^2-15y+2y-10-3y^2+10=-13y$

سؤال : **أصحح الخطأ :** كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي : $(\sqrt{5}h-4)(h-6)=5h^2+10h-24$ حدد خطأ نسرين وصححه .

الحل :

$$(\sqrt{5}\,h-4)(h-6)=\sqrt{5}\,h^2-6\sqrt{5}\,h-4h+24=\sqrt{5}\,h^2-(6\sqrt{6}+4)h+24$$

سؤال : **حس عددي :** أي العددين أكبر ؟ العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. وضح اجابتك

الحل :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6} \quad , \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$$

العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ أكبر من العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

سؤال : **أكتب ناتج ضرب المقدارين الجبريين :** $\left(2Z+\frac{1}{2}\right)\left(2Z-\frac{1}{2}\right)$

الحل :

$$\left(2Z+\frac{1}{2}\right)\left(2Z-\frac{1}{2}\right)=(2Z)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=4Z^2-\frac{1}{4}$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية :

i) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$
ii) $(2y-5)(2y+5) = 4y^2 - 25$
iii) $(\sqrt{2}+Z)(\sqrt{2}-Z) = 2 - Z^2$

تدريب 1 // جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية :

i) $(Z+6)^2 = Z^2 + 12Z + 36$
ii) $(4x-3)(4x+3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$
iii) $(5+Z)(25-5Z+Z^2) = 5^3 + Z^3 = 125 + Z^3$

اختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر :

[1] $(x+5)^2$
a) $x^2 - 10x + 25$ b) $x^2 + 10x + 25$
c) $x^2 + 5x + 25$ d) $x^2 - 5x + 25$

الحل :

$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

الجواب فرع : (b)

[4] $(3-2Z)(3+2Z)$
a) $6 - 4Z^2$ b) $9 - 4Z^2$
c) $6 + 4Z^2$ d) $9 + 4Z^2$

2/2019

الحل :

$(3-2Z)(3+2Z) = 3^2 - (2Z)^2 = 9 - 4Z^2$

الجواب فرع : (b)

[3] $(x+8)(x-8)$
a) $x^2 - 64$ b) $x^2 + 64$
c) $x^2 + 16$ d) $x^2 - 16$

2 د /2025

الحل :

$(x+8)(x-8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$

الجواب فرع : (a)

[5] $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$
a) $y^2 - \sqrt{12}$ b) $y^2 - 6$
c) $y^2 + \sqrt{12}$ d) $y^2 + 6$

الحل :

$(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6}) = y^2 - (\sqrt{6})^2 = y^2 - 6$

الجواب فرع : (b)

[6] $(2x-3)(x+9)$
a) $2x^2 + 15x - 27$ b) $2x^2 - 5x - 27$
c) $2x^2 - 15x + 27$ d) $2x^2 + 15x + 27$

الحل :

$(2x-3)(x+9) = 2x^2 + 18x - 3x - 27$
$= 2x^2 + 15x - 27$

الجواب فرع : (a)

[7] $(y-2)(y^2+2y+4)$

a) y^3+8 b) y^3-8

c) y^3-4 d) y^3-16

الحل:

$$(y-2)(y^2+2y+4)=y^3-2^3=y^3-8$$

الجواب فرع: (b)

[8] $\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2\right)$

a) $\frac{1}{27}-x^3$ b) $\frac{1}{27}+x^3$ c) $\frac{1}{9}+x^3$ d) $\frac{1}{9}-x^3$

الحل:

$$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-x^3=\frac{1}{27}-x^3$$

الجواب فرع: (a)

[9] $(Z-2)^3$

a) $Z^3+6Z^2+12Z+8$ b) $Z^3-6Z^2+12Z-8$

c) $Z^3+6Z^2-12Z-8$ d) $Z^3-6Z^2-12Z+8$

الحل:

$$\begin{aligned}(Z-2)^3&=(Z-2)(Z-2)^2\\&=(Z-2)(Z^2-4Z+4)\\&=Z(Z^2-4Z+4)-2(Z^2-4Z+4)\\&=Z^3-4Z^2+4Z-2Z^2+8Z-8\\&=Z^3-6Z^2+12Z-8\end{aligned}$$

الجواب فرع: (b)

[10] $\left(y+\frac{1}{5}\right)^3$

a) $y^3-\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$

b) $y^3+\frac{3}{3}y^2-\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$

c) $y^3+\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$

d) $y^3-\frac{3}{3}y^2-\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$

الحل:

$$\begin{aligned}\left(y+\frac{1}{5}\right)^3&=\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)^3\\&=\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)\\&=y\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)\\&\quad+\frac{1}{5}\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)\\&=y^3+\frac{2}{5}y^2+\frac{1}{25}y+\frac{1}{5}y^2+\frac{2}{25}y+\frac{1}{125}\\&=y^3+\frac{3}{5}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}\end{aligned}$$

الجواب فرع: (c)

جد ناتج ضرب

(1) $(3x-2)\ (9x^2+6x+4)$

(2) $\left(\frac{1}{3}y+3\right)\left(\frac{1}{3}y+2\right)$

واجب

الدرس [2-2] تحليل المقدار الجبري

[2 – 2 – 1] تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

لإيجاد العامل المشترك نتبع ما يأتي :

1) نستخرج العامل المشترك للاعداد حيث يمثل أصغر عدد في المقدار الجبري ويمكن قسمة المقدار الجبري عليه .

2) نستخرج العامل المشترك للمتغيرات بأصغر أس .

3) نفتح قوس ونقوم بقسمة كل حد في المقدار الجبري على العامل المشترك وناتج القسمة يكتب داخل القوس .

ملاحظـــــة : التحقق من صحة الحل : نقوم بتوزيع العامل المشترك على داخل القوس فاذا حصلنا على المقدار الجبري فأن التحليل صحيح واذا لم نحصل على المقدار الجبري فأن الحل خطأ ويجب إعادة التحليل .

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

1 $6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x(2x^2 + 3x - 6)$

التحقق : $3x(2x^2 + 3x - 6) = 3x(2x^2) + 3x(3x) - 3x(6) = 6x^3 + 9x^2 - 18x$

2 $\sqrt{12}\,y^2Z + \sqrt{2}(\sqrt{6}\,yZ^2 - \sqrt{24}\,yZ) = 2\sqrt{3}\,y^2Z + \sqrt{12}\,yZ^2 - \sqrt{48}\,yZ$

$= 2\sqrt{3}\,y^2Z + 2\sqrt{3}\,yZ^2 - 4\sqrt{3}\,yZ = 2\sqrt{3}\,yZ(y + Z - 2)$

التحقق : $2\sqrt{3}\,yZ(y + Z - 2) = 2\sqrt{3}\,y^2Z + 2\sqrt{3}\,yZ^2 - 4\sqrt{3}\,yZ$

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

1 $5x(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(5x - 7)$

2 $\frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{3}y^2(y - 1) = (y - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2\right)$

3 $\sqrt{3}\,v^2(Z + 2) - \sqrt{5}\,v(Z + 2) = v(Z + 2)(\sqrt{3}\,v - \sqrt{5})$

[2 – 2 – 2] تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

تستعمل خاصية التجميع في التحليل اذا كان المقدار الجبري يتكون من أربعة حدود .

* نضع كل حدين بين قوسين ثم نستخرج العامل المشترك من كل قوس .
* نستخدم خاصية ثنائية الحد كعامل مشترك

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

ت/2020

1 $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10) = 4x^2(x - 2) + 5(x - 2)$

$= (x - 2)(4x^2 + 5)$

التحقق : $(x-2)(4x^2+5) = 4x^3+5x-8x^2-10 = 4x^3-8x^2+5x-10$

2 $\sqrt{2}\,h^2t+\sqrt{3}\,t^2v-\sqrt{8}\,h^2v-\sqrt{12}\,v^2t = (\sqrt{2}\,h^2t-\sqrt{8}\,h^2v)+(\sqrt{3}\,t^2v-\sqrt{12}\,v^2t)$

$= (\sqrt{2}\,h^2t-2\sqrt{2}\,h^2v)+(\sqrt{3}\,t^2v-2\sqrt{3}\,v^2t)$

$= \sqrt{2}\,h^2(t-2v)+\sqrt{3}\,tv(t-2v)$

$= (t-2v)(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)$

التحقق : $(t-2v)(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv) = t(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)-2v(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)$

$= \sqrt{2}\,h^2t+\sqrt{3}\,t^2v-2\sqrt{2}h^2v+2\sqrt{3}\,v^2t$

$= \sqrt{2}\,h^2t+\sqrt{3}\,t^2v-\sqrt{8}h^2v+\sqrt{12}\,v^2t$

سؤال : حلل المقدار باستعمال التجميع مع المعكوس :

$14x^3-7x^2+3-6x = (14x^3-7x^2)+(3-6x) = 7x^2(2x-1)+3(1-2x)$

$= 7x^2(2x-1)+3(-1)(2x-1) = 7x^2(2x-1)-3(2x-1)$

$= (2x-1)(7x^2-3)$

2/2021

تأكد من فهمك

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GC) وتحقق من صحة الحل :

1 $9x^2-21x = 3x(3x-7)$

التحقق : $3x(3x-7) = 9x^2-21x$

2 $10-15y+5y^2 = 5(2-3y+y^2)$

التحقق : $5(2-3y+y^2) = 10-15y+5y^2$

3 $14Z^4-21Z^2-7Z^3 = 7Z^2(2Z^2-3-Z)$

التحقق : $7Z^2(2Z^2-3-Z) = 14Z^4-21Z^2-7Z^3$

4 $\sqrt{8}\,t^2r+\sqrt{2}(tr^2-\sqrt{3}\,tr)$

$= 2\sqrt{2}\,t^2r+\sqrt{2}\,tr^2-\sqrt{2}\sqrt{3}\,tr$

$= \sqrt{2}\,tr(2t+r-\sqrt{3})$

التحقق : $\sqrt{2}\,tr(2t+r-\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{2}\,t^2r+\sqrt{2}\,tr^2-\sqrt{2}\,tr(\sqrt{3})$

$= \sqrt{2}\,t^2r+\sqrt{2}(tr^2-\sqrt{3}\,tr)$

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

1 $3y(y-4)-5(y-4) = (y-4)(3y-5)$

2 $\frac{1}{4}(t+5)+\frac{1}{3}t^2(t+5) = (t+5)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}t^2\right)$

3 $\sqrt{2}\,n(x+1)-\sqrt{3}\,m(x+1) = (x+1)(\sqrt{2}\,n-\sqrt{3}\,m)$

4 $2x(x^2-3)+7(x^2-3) = (x^2-3)(2x-7)$

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

1 $3y^3-6y^2+7y-14=(3y^3-6y^2)+(7y-14)=3y^2(y-2)+7(y-2)$
$=(y-2)(3y^2+7)$

التحقق : $(y-2)(3y^2+7)=3y^3+7y-6y^2-14=3y^3-6y^2+7y-14$

2 $21-3x+35x^2-5x^3=(21-3x)+(35x^2-5x^3)=3(7-x)+5x^2(7-x)$
$=(7-x)(3+5x^2)$

التحقق : $(7-x)(3+5x^2)=21+35x^2-3x-5x^3=21-3x+35x^2-5x^3$

3 $2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k=(2r^2k-4r^2v)+(3k^2v-6v^2k)$
$=2r^2(k-2v)+3kv(k-2v)=(k-2v)(2r^2+3kv)$

التحقق : $(k-2v)(2r^2+3kv)=2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k$

4 $3Z^3-\sqrt{18}\,Z^2+Z-\sqrt{2}=(3Z^3+Z)+\left(-\sqrt{18}\,Z^2-\sqrt{2}\right)$
$=(3Z^3+Z)+\left(-3\sqrt{2}\,Z^2-\sqrt{2}\right)$
$=Z(3Z^2+1)-\sqrt{2}(3Z^2+1)=(3Z^2+1)(Z-\sqrt{2})$

التحقق : $(3Z^2+1)(Z-\sqrt{2})=3Z^3-3\sqrt{2}Z^2+Z-\sqrt{2}$

سؤال : حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

1 $21y^3-7y^2+3-9y=(21y^3-7y^2)+(3-9y)=7y^2(3y-1)+3(1-3y)$
$=7y^2(3y-1)+3(-1)(3y-1)=7y^2(3y-1)-3(3y-1)$
$=(3y-1)(7y^2-3)$

2 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+5-10x=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3\right)+(5-10x)=\frac{1}{2}x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)+5(1-2x)$
$=\frac{1}{4}x^3(2x-1)+5(1-2x)=\frac{1}{4}x^3(2x-1)-5(2x-1)$
$=(2x-1)\left(\frac{1}{4}x^3-5\right)$

3 $6Z^3-9Z^2+12-8Z=(6Z^3-9Z^2)+(12-8Z)=3Z^2(2Z-3)+4(3-2Z)$
$=3Z^2(2Z-3)+4(-1)(2Z-3)$
$=3Z^2(2Z-3)-4(2Z-3)=(2Z-3)(3Z^2-4)$

4 $5t^3-15t^2-2t+6=(5t^3-15t^2)+(-2t+6)=5t^2(t-3)+2(-t+3)$
$=5t^2(t-3)+2(-1)(t-3)=5t^2(t-3)-2(t-3)=(t-3)(5t^2-2)$

1/2021

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GC) وتحقق من صحة الحل :

1 $12y^3 - 21y^2 = 3y^2(4y - 7)$

التحقق : $3y^2(4y - 7) = 12y^3 - 21y^2$

2 $5t^3 + 10t^2 - 15t = 5t(t^2 + 2t - 3)$

التحقق : $5t(t^2 + 2t - 3) = 5t^3 + 10t^2 - 15t$

3 $6v^2(3v - 6) + 18v = 18v^3 - 36v^2 + 18v$

$= 18v(v^2 - 2v + 1)$

التحقق : $18v(v^2 - 2v + 1) = 18v^3 - 36v^2 + 18v$

$= 6v^2(3v - 6) + 18v$

4 $\sqrt{12}\, n^3r + \sqrt{3}\,(nr^3 - \sqrt{2}\, nr)$

$= 2\sqrt{3}\, n^3r + \sqrt{3}\, nr^3 - \sqrt{3}\sqrt{2}\, nr$

$= \sqrt{3}\, nr(2n^2 + r^2 - \sqrt{2})$

التحقق : $\sqrt{3}\, nr(2n^2 + r^2 - \sqrt{2})$

$= 2\sqrt{3}\, n^3r + \sqrt{3}\, nr^3 - \sqrt{3}\sqrt{2}\, nr$

$= \sqrt{12}\, n^3r + \sqrt{3}\,(nr^3 - \sqrt{2}\, nr)$

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

1 $\frac{1}{7}(y + 1) + \frac{1}{3}y^2(y + 1) = (y + 1)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}y^2\right)$

2 $\sqrt{3}\, k(x^2 + 1) - \sqrt{5}\, v(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(\sqrt{3}\, k - \sqrt{5}\, v)$

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

1 $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20 = (5x^3 - 10x^2) + (10x - 20)$

$= 5x^2(x - 2) + 10(x - 2) = (x - 2)(5x^2 + 10)$

التحقق : $(x - 2)(5x^2 + 10) = 5x^3 + 10x - 10x^2 - 20 = 5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$

2 $49 - 7Z + 35Z^2 - 5Z^3 = (49 - 7Z) + (35Z^2 - 5Z^3)$

$= 7(7 - Z) + 5Z^2(7 - Z) = (7 - Z)(7 + 5Z^2)$

التحقق : $(7 - Z)(7 + 5Z^2) = 49 + 35Z^2 - 7Z - 5Z^3 = 49 - 7Z + 35Z^2 - 5Z^3$

3 $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k = (3t^3k + 9k^2s) + (-6t^3s - 18s^2k)$

$= 3k(t^3 + 3ks) - 6s(t^3 - 3ks) = (t^3 + 3ks)(3k - 6s)$

التحقق : $(t^3 + 3ks)(3k - 6s) = 3t^3k - 6t^3s + 9k^2s - 18s^2k = 3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k$

4 $2y^4 - \sqrt{12}\, y^3 + \sqrt{2}\, y - \sqrt{6} = (2y^4 - \sqrt{12}\, y^3) + (\sqrt{2}\, y - \sqrt{6})$

$= (2y^4 - 2\sqrt{3}\, y^3) + (\sqrt{2}\, y - \sqrt{2}\sqrt{3})$

$$= 2y^3(y-\sqrt{3}) + \sqrt{2}(y-\sqrt{3}) = (y-\sqrt{3})(2y^3-\sqrt{2})$$

التحقق: $(y-\sqrt{3})(2y^3-\sqrt{2}) = 2y^4 - \sqrt{2}y - 2\sqrt{3}y^3 - \sqrt{6} = 2y^4 - 2\sqrt{3}\,y^3 + \sqrt{2}\,y - \sqrt{6}$

سؤال : حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

1 $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x = (12x^3 - 4x^2) + (3 - 9x) = 4x^2(3x-1) + 3(1-3x)$
$= 4x^2(3x-1) + 3(-1)(3x-1) = 4x^2(3x-1) - 3(3x-1)$
$= (3x-1)(4x^2-3)$

2 $4r^3 - 15r^2 - 3r + 12 = (4r^3 - 16r^2) + (-3r + 12) = 4r^2(r-4) + 3(-r+4)$
$= 4r^2(r-4) + 3(-1)(r-4) = 4r^2(r-4) - 3(r-4)$
$= (r-4)(4r^2-3)$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : الطاقة الشمسية : الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السليكون تمتص الضوء من الشمس . ما أبعاد اللوح الشمسي اذا كانت مساحة $3x(x-4) - 22(x-4)$ أمتار مربعة ؟

الحل :

$A = 3x(x-4) - 22(x-4) = (x-4)(3x-22)$

ابعاد اللوح الشمسي هي : $(x-4)\,,(3x-22)$

سؤال : طائر الفلامنكو : طائر الفلامنكو , من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردي وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مرورا بمنطقة الأهوار جنوبي العراق لتحصل على غذاء من المسطحات المائية . اذا كانت مساحة المسطحالمائي الذي غطته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2 + 14y + 7(2y+7)$ أمتار مربعة . فما شكل المسطح وما أبعاده ؟

الحل :

$A = 4y^2 + 14y + 7(2y+7) = 2y(2y+7) + 7(2y+7) = (2y+7)(2y+7) = (2y+7)^2$

شكل المسطح هو مربع . أبعاد المسطح هو : $(2y+7)\,,(2y+7)$

سؤال : ساعة بغداد : ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأنشئت في سنة 1994 م . ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة اذا علمت أن مساحتها $Z^2\pi - 3Z\pi - \pi(3Z-9)$

الحل :

$A = Z^2\pi - 3Z\pi - \pi(3Z-9) = Z\pi(Z-3) - 3\pi(Z-3) = (Z-3)(Z\pi - 3\pi)$

$A = (Z-3)\pi(Z-3) \implies A = \pi(Z-3)^2 \quad , \quad A = r^2\pi$

$r^2\pi = \pi(Z-3)^2 \quad \} \div \pi$

$\frac{r^2\pi}{\pi} = \frac{\pi(Z-3)^2}{\pi} \implies r^2 = (Z-3)^2 \implies r = (Z-3)$ نصف القطر

فـــــــــكر

سؤال : **تحد :** حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $5x^5y + 7y^3Z - 10x^5Z - 14Z^2y^2 = (5x^5y - 10x^5Z) + (7y^3Z - 14Z^2y^2)$

$= 5x^5(y-2Z) + 7y^2Z(y-2z) = (y-2Z)(5x^5 + 7y^2Z)$

سؤال : **أصحح الخطأ :** كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي :

$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}\,t^3 + t^2 - \sqrt{12}\,t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}\,t^2 - t)$

اكتشف خطأ ابتسام وصححه .

الحل :

$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}\,t^3 + t^2 - \sqrt{12}\,t = (\sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,t^3) + (t^2 - 2\sqrt{3}\,t)$

$= \sqrt{2}\,t^3(t - 2\sqrt{3}) + t(t - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{2}\,t^3 + t)(t - 2\sqrt{3})$

سؤال : **حس عددي :** ما العدد المجهول في المقدار : $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x+3)(x+\ \ )$

الحل :

$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x^2 + 3x) + (5x + 15) = x(x+3) + 5(x+3) = (x+3)(x+5)$

العدد المجهول هو : 5

سؤال : **اكتب :** ناتج طرح المقدار : $(x+y)(x-y)$ من المقدار : $(x+y)(x+y)$ بأبسط صورة

الحل :

$(x+y)(x+y) - (x+y)(x-y) = x^2 + xy + yx + y^2 - (x^2 - y^2)$

$= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2$

$= 2xy + 2y^2 = 2y(x+y)$

الطريقة الثانية :

$(x+y)(x+y) - (x+y)(x-y) = (x+y)[x+y-(x-y)]$

$= (x+y)(x+y-x+y) = (x+y)2y$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل :

$$4x^2 + 14x - 30 = 2(2x^2 + 7x - 15) = 2(2x - 3)(x + 5)$$

التحقق :

$$2(2x - 3)(x + 5) = 2(2x^2 + 10x - 3x - 15) = 2(2x^2 + 7x - 15) = 4x^2 + 14x - 30$$

تدريب 1 // حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل :

$$\sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{3}\left(\sqrt{6}\,xZ^2 - \sqrt{12}\,xZ\right) = 2\sqrt{2}\,x^2Z + \sqrt{18}\,xZ^2 - \sqrt{36}\,xZ == 2\sqrt{2}\,x^2Z + 3\sqrt{2}\,xZ^2 - 6xZ$$
$$= xZ\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,Z - 6\right)$$

التحقق :

$$xZ\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,Z - 6\right) = 2\sqrt{2}\,x^2Z + 3\sqrt{2}\,xZ^2 - 6xZ = \sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{18}\,xZ^2 - \sqrt{36}xZ$$
$$= \sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{3}\left(\sqrt{6}\,xZ^2 - \sqrt{12}\,xZ\right)$$

اختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GC) :

[1] $12x^3 + 9x^2 - 3x$

a) $3x(4x^2 + 3x + 1)$ b) $3x(4x^2 + 3x - 1)$

c) $9x(4x^2 + 3x + 1)$ d) $9x(4x^2 + 3x - 1)$

الحل :

$$12x^3 + 9x^2 - 3x = 3x(4x^2 + 3x - 1)$$

الجواب فرع : (b)

[2] $6y^2(3y - 4) + 36y$

a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$ b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$

c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$ d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$

الحل :

$$6y^2(3y - 4) + 36y = 18y^3 - 24y^2 + 36y$$
$$= 6y(3y^2 - 4y + 6)$$

الجواب فرع : (d)

سؤال : حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

[3] $3Z(Z - 3) - 7(Z - 3)$

a) $(Z + 3)(3Z - 7)$ b) $(Z - 3)(3Z + 7)$

c) $(Z - 3)(3Z - 7)$ d) $(Z + 3)(3Z + 7)$

الحل :

$$3Z(Z - 3) - 7(Z - 3) = (Z - 3)(3Z - 7)$$

الجواب فرع : (c)

[5] $\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$

a) $(x+1)(\sqrt{2}\,v-\sqrt{3}\,t)$
b) $(x-1)(\sqrt{2}\,v-\sqrt{3}\,t)$
c) $(x-1)(\sqrt{2}\,v+\sqrt{3}\,t)$
d) $(x+1)(\sqrt{2}\,v+\sqrt{3}\,t)$

الحل :

$$\sqrt{2}\,v(x-1)-\sqrt{3}\,t(x-1)$$
$$=(x-1)(\sqrt{2}\,v-\sqrt{3}\,t)$$

الجواب فرع : (b)

سؤال : حلل المقدار باستعمال خاصية التوزيع وتحقق من صحة الحل :

[6] $3y^3-9y^2+5y-15$

a) $(y+3)(3y^2+5)$ b) $(y-3)(3y^2-5)$
c) $(y-3)(3y^2+5)$ d) $(y+3)(3y^2-5)$

الحل :

$$3y^3-9y^2+5y-15=(3y^3-9y^2)+(5y-15)$$
$$=3y^2(y-3)+5(y-3)$$
$$=(y-3)(3y^2+5)$$

التحقق من صحة الحل :

$$(y-3)(3y^2+5)=y(3y^2+5)-3(3y^2+5)$$
$$=3y^3+5y-9y^2-15$$
$$=3y^3-9y^2+5y-15$$

الجواب فرع : (c)

سؤال : حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

[7] $20y^3-4y^2+3-15y$

a) $(5y+1)(4y^2-3)$ b) $(5y-1)(4y^2+3)$
c) $(5y-1)(4y^2-3)$ d) $(5y+1)(4y^2+3)$

الحل :

$$20y^3-4y^2+3-15y$$
$$=(20y^3-4y^2)+(3-15y)$$
$$=4y^2(5y-1)+3(1-5y)$$
$$=4y^2(5y-1)+3(-1)(5y-1)$$
$$=4y^2(5y-1)-3(5y-1)$$
$$=(5y-1)(4y^2-3)$$

الجواب فرع : (c)

[8] $\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3+4-2x$

a) $(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3-2\right)$ b) $(x+2)\left(\frac{1}{6}x^3-2\right)$
c) $(x+2)\left(\frac{1}{6}x^3-2\right)$ d) $(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3+2\right)$

الحل :

$$\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3+4-2x=\left(\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)+(4-2x)$$
$$=\frac{1}{6}x^3(x-2)+2(2-x)$$
$$=\frac{1}{6}x^3(x-2)+2(-1)(x-2)$$
$$=\frac{1}{6}x^3(x-2)-2(x-2)$$
$$=(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3-2\right)$$

الجواب فرع : (a)

الدرس [3-2] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

[2 – 3 – 1] تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

تتكون طريقة الفرق بين مربعين من قوسين أحدهما موجب والأخر سالب . أي أن :

القوس الأول = الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني = الجذر التربيعي للحد الأول – الجذر التربيعي للحد الثاني

أي أن تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين :

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$$

ملاحظـــــة : اذا كان المقدار بالصورة $x^2 + y^2$ فأنه لا يتحلل .

ملاحظة : نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

سؤال : جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع .

الحل :

$$x^2 - 400 = x^2 - (20)^2 = (x + 20)(x - 20)$$

طول ساحة كرة القدم : $(x + 20)$ متراً وعرضها : $(x - 20)$ متراً .

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين :

1 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

2 $36y^2 - Z^2 = (6y + Z)(6y - Z)$

3 $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

4 $h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}\,h + \sqrt{7}\,v)(\sqrt{5}\,h - \sqrt{7}\,v)$

5 $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2) = 2xy(2x + y)(2x - y)$

6 $2x^2 - Z^2 = (\sqrt{2}\,x + Z)(\sqrt{2}\,x - Z)$

7 $12 - t^2 = (\sqrt{12} + t)(\sqrt{12} - t) = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

8 $\frac{1}{16}Z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}Z^2 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2}Z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}Z - \frac{1}{3}\right)$

[2 – 3 – 2] تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل

هي تحليل مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل .

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \quad , \quad x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

يكون المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ مربعا كاملا اذا تحققت الشروط التالية :

1) يجب أن يكون أشارة الحد الأول والحد الأخير موجبة ومربع كامل (له جذر تربيعي) .

2) نطبق قانون الحد الوسط (الثاني) : $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

3) اذا كان المقدار مربعا كاملا فأن تحليله يكون : $ax^2 \pm bx + c = \left(\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c}\right)^2$

$\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني) .

حيث ax^2 الحد الأول , bx : الحد الوسط (الثاني) , c : الحد الأخير (الثالث)

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل :

[1] $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

[2] $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$

[3] $16Z^2 - 8Z + 1 = (4Z - 2)^2$

سؤال : حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله :

[1] $x^2 + 10x + 25$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(25)}$

$= 2(x)(5) = 10x$ المقدار كامل

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

[2] $y^2 + 14y + 36$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y \neq 14y$

المقدار ليس مربع كامل

[3] $4 - 37v + 9v^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bv = 2\sqrt{(9v^2)(4)} = 2(3v)(2) = 12y \neq 37y$

المقدار ليس مربع كامل

[4] $9h^2 - 6h + 3$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bh = 2\sqrt{(9h^2)(3)} = 2(3h)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,h \neq 6h$

المقدار ليس مربع كامل

الحد المفقود

لإيجاد الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا نطبق قانون الحد الوسط :

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

سؤال : اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

[1] $25x^2 - \cdots\cdots + 49$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} = 2(5x)(7) = 70x$

$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$

[2] $\cdots\cdots + 8x + 16$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)}$ بتربيع الطرفين

$64x^2 = 4(ax^2)(16) \implies 64x^2 = 64(ax^2)$

$ax^2 = \frac{64x^2}{64} = x^2 \implies x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

[3] $y^2 + 14y + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$14y = 2\sqrt{(y^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$196y^2 = 4y^2(c) \implies c = \frac{196y^2}{4y^2} = 49$

$y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$

تأكد من فهمك

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين :

1 $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

2 $36 - 4x^2 = (6 + 2x)(6 - 2x)$

3 $h^2 - v^2 = (h + v)(h - v)$

4 $9m^2 - 4n^2 = (3m + 2n)(3m - 2n)$

5 $27x^3Z - 3xZ^3 = 3xZ(9x^2 - Z^2) = 3xZ(3x + Z)(3x - Z)$

6 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل :

1 $y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$

2 $9Z^2 - 6Z + 1 = (3Z - 1)^2$

3 $v^2 + 2\sqrt{3}\,v + 3 = \left(v + \sqrt{3}\right)^2$

4 $4h^2 - 20h + 25 = (2h - 5)^2$

سؤال : حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله :

11 $x^2 + 18x + 81$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(81)}$

$= 2(x)(9) = 18x$ المقدار مربع كامل

$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2$

12 $16 - 14v + v^2$

ت/2023

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(v^2)(16)}$

$= 2(v)(4) = 8v \neq 14v$ المقدار ليس مربع كامل

13 $64h^2 - 48h - 9$

الحل :

المقدار ليس مربع كامل لأن إشارة الحد الأخير سالبة

14 $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(4t^2)(3)}$

$= 2(2t)\left(\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}\,t$ المقدار مربع كامل

$3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2 = \left(\sqrt{3} - 2t\right)^2$

سؤال : اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

1 $\cdots\cdots + 14y + 49$

3 /2021 2/2019

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$14y = 2\sqrt{(ay^2)(49)}$

$196y^2 = 4(ay^2)(49) \implies 196y^2 = 196(ay^2)$

$ay^2 = \frac{196y^2}{196} = y^2 \implies y^2 + 14y + 49$

$= (y + 7)^2$

2 $Z^2 + 4Z + \cdots\cdots$

د/2023

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$4Z = 2\sqrt{(Z^2)(C)}$ بتربيع الطرفين

$16Z^2 = 4Z^2(C) \implies C = \frac{16Z^2}{4Z^2} = 4$

$Z^2 + 4Z + 4 = (Z + 2)^2$

3 $3 - \cdots\cdots + 9x^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(9x^2)(3)} = 2(3x)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,x$

$3 - 6\sqrt{3}\,x + 9x^2 = (\sqrt{3} - 3x)^2$

4 $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$2\sqrt{5}\,x = 2\sqrt{(4x^2)(C)}$ بتربيع الطرفين

$20x^2 = 4(4x^2)(C) \Rightarrow 20x^2 = 16x^2(C)$

$C = \frac{20x^2}{16x^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \frac{5}{4}$

$= \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

19 $25 - 4x^2 = (5 + 2x)(5 - 2x)$

20 $y^2 - 121 = (y + 11)(y - 11)$

21 $x^2 - 16Z^2 = (x + 4Z)(x - 4Z)$

22 $12 - 3t^2 = 3(4 - t^2) = 3(2 + t)(2 - t)$

23 $8y^3x - 2x^3y = 2xy(4y^2 - x^2)$

$= 2xy(2y + x)(2y - x)$

24 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(2y^2 - 1)$

$= \frac{1}{8}(\sqrt{2}y + 1)\left(\sqrt{2}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

30 $1 - 4m + 4m^2 = (1 - 2m)^2$

25 $\frac{1}{3}Z^5 - \frac{1}{12}Z = \frac{1}{12}Z(4Z^4 - 1)$

$= \frac{1}{12}Z(2Z^2 + 1)(\sqrt{2}Z + 1)(\sqrt{2}Z - 1)$

26 $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$

27 $3Z^2 - 6Z + 3 = 3(Z^2 - 2Z + 1)$

$= 3(Z - 1)^2$

28 $16n^2 + 8\sqrt{3}\,n + 3 = \left(4n + \sqrt{3}\right)^2$

29 $4t^3 - 12t^2 + 9t = t(4t^2 - 12t + 9)$

$= t(2t - 3)^2$

سؤال : حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله :

1 $4x^2 + 18x + 16$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(4x^2)(16)}$

$= 2(2x)(4) = 16x \neq 18x$

المقدار ليس مربع كامل

2 $y^2 + 10y + 25$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} =$

$by = 2\sqrt{(y^2)(25)} = 2(y)(5) = 10y$ مربع كامل

$y^2 + 10y + 25 = (y + 5)^2$

4 $2h^2 - 12h - 18$

الحل :

المقدار ليس مربع كامل لأن اشرة الحد الأخير سالبة

3 $49 - 7v + v^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bv = 2\sqrt{(v^2)(49)} = 2(v)(7) = 14v \neq 7v$

المقدار ليس مربع كامل

6 $3 - 2\sqrt{3}\,Z + Z^2$ د2023/3

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bZ = 2\sqrt{(Z^2)(3)} = 2(Z)(\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{3}\,Z$ المقدار مربع كامل

$3 - 2\sqrt{3}\,Z + Z^2 = (\sqrt{3} - Z)^2$

5 $4v^2 + 4v + 4$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bv = 2\sqrt{(4v^2)(4)} = 2(2v)(2) = 8v \neq 4v$

المقدار ليس مربع كامل

سؤال : اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

2 $25 - 20x + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$20x = 2\sqrt{(ax^2)(25)}$ بتربيع الطرفين

$400x^2 = 4(ax^2)(25) \Rightarrow 400x^2 = 100(ax^2)$

$ax^2 = \dfrac{400x^2}{100} = 4x^2 \Rightarrow 25 - 20x + 4x^2$

$= (5 - 2x)^2$

1 $y^2 + \cdots\cdots + 36$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y$

$y^2 + 12y + 36 = (y + 6)^2$

1/2019

4 $5 - \cdots\cdots + 16x^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(16x^2)(5)} = 2(4x)(\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}\,x$

$5 - 8\sqrt{5}\,x + 16x^2 = (\sqrt{5} - 4x)^2$

3 $4v^2 + 8v + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$8v = 2\sqrt{(4v^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$64v^2 = 4(4v^2)(c) \Rightarrow 64v^2 = 16v^2(c)$

$c = \dfrac{64v^2}{16v^2} = 4 \Rightarrow 4v^2 + 8v + 4 = (2v + 2)^2$

6 $9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$6\sqrt{2}\,h = 2\sqrt{(9h^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$72h^2 = 4(9h^2)(c) \Rightarrow 72h^2 = 36h^2(c)$

5 $81 + 18Z + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$18Z = 2\sqrt{(aZ^2)(81)}$ بتربيع الطرفين

$324Z^2 = 4(aZ^2)(81) \Rightarrow 324Z^2 = 324(aZ^2)$

$aZ^2 = \frac{324Z^2}{324} = Z^2 \Rightarrow 81 + 18Z + Z^2$ $= (9 + Z)^2$	$c = \frac{72h^2}{36h^2} = 2 \Rightarrow 9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + 2$ $= (3h + \sqrt{2})^2$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **مئذنة الملوية :** وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية وتعد احدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد فهي إحدى اثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 + 8x + 16$ مترا مربعا . ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟

الحل :

$A = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ طول ضلع القاعدة

سؤال : **مزرعة أبقار :** لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر وسعها لتصبح مستطيلة الشكل الضلع الآخر فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ مترا مربعا . ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟

الحل :

$A = x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$

طول المزرعة $(x +)$, عرضها $(x - 9)$

سؤال : **لوحة فنية :** رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية . أيمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعا كاملا أم لا ؟

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(4x^2)(9)} = 2(2x)(3) = 12x$ لا يمثل مربعا كاملا

فكـر

سؤال : **تحد :** هل المقدار الاتي يمثل مربعا كاملا ام لا ؟ علل اجابتك :

i) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$

الحل :

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{\left(\frac{1}{9}x^2\right)\left(\frac{1}{16}\right)} = 2\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}x$$

المقدار مربع كامل

سؤال : **أصحح الخطأ :** قالت منتهى أن المقدار : $(2x-1)(2x+1)$ هو تحليل للمربع الكامل : $4x^2 - 4x + 1$ حدد خطأ منتهي وصححه .

الحل :

المقدار : $(2x-1)(2x+1)$ هو ليس تحليل للمربع الكامل

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

سؤال : **حس عددي :** أيمثل المقدار : $9x^2 + 12x - 4$ مربعا كاملا أم لا ؟ وضح اجابتك .

الحل : المقدار لا يمثل مربعا كاملا لأن إشارة الحد الأخير (الثالث) سالبة .

سؤال : **أكتب //** تحليل للمقدار : $4x^2 - 8x + 4$

الحل :

$$4x^2 - 8x + 4 = (2x)^2 - 2(x \times 4) + (2)^2 = (2x-2)^2$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

ii) $25y^2 - 49 = (5y + 7)(5y - 7)$

تدريب 1 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $4x^2 - 49 = (2x + 7)(2x - 7)$

ii) $3x^2 - y^2 = (\sqrt{3}\,x + y)(\sqrt{3}\,x - y)$

مثال 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية كمربع كامل :

i) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$

تدريب 2 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كمربع كامل :

$81Z^2 - 18Z + 1 = (9Z - 1)^2$

اختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

[1] $9 - 4x^2$

a) $(3 + 2x)(3 + 2x)$ b) $(3 + 2x)(3 - 2x)$

c) $(9 - x)(9 + 4x)$ d) $(3 + x)(3 - 4x)$

الحل :

$9 - 4x^2 = (3 + 2x)(3 - 2x)$

الجواب فرع : (b)

[2] $12y^3Z - 3yz^3$

a) $3y(2y - Z)(y + 2Z)$ b) $3Z(2y - Z)(2y + Z)$

c) $3yZ(2y - Z)(2y + Z)$ d) $3yZ(y - 2Z)(y + 2Z)$

الحل :

$12y^3Z - 3yz^3 = 3yZ(4y^2 - Z^2)$

$= 3yZ(2y - Z)(2y + Z)$

الجواب فرع : (c)

[3] $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x$

a) $\frac{x}{6}\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{x}{6}\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$ d) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)$

[4] $4x^2 + 24x + 36$

a) $(x + 6)^2$ b) $(x - 6)^2$

c) $4(x - 3)^2$ d) $4(x + 3)^2$

الحل :

$4x^2 + 24x + 36 = 4(x^2 + 6x + 9) = 4(x + 3)^2$

الجواب فرع : (d)

الحل :

$$\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x=\frac{1}{6}x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

الجواب فرع : (a)

[5] $16-8y+y^2$

a) $(4+2y)^2$ b) $(4-2y)^2$

c) $(4-y)^2$ d) $(4+y)^2$

الحل :

$$16-8y+y^2=(4-y)^2$$

الجواب فرع : (c)

سؤال : حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعا كاملا :

[6] $4x^2-20x+25$

a) $2(x)(5)=10x$ مربع كامل لأن

b) $-2(2x)(5)=-20x$ مربع كامل لأن

c) $-4(x)(5)\neq 10x$ مربع كامل لأن

d) $-2(2x)(5)\neq 20x$ ليس مربع كامل لأن

الحل :

$$bx=-2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx=-2\sqrt{(4x^2)(25)}=-2(2x)(5)$$

$=-20x$ مربع كامل

الجواب فرع : (b)

[7] $64-48y+9y^2$

a) $2(4)(3y)$

$\neq -48y$ ليس مربع كامل لأن

b) $2(8)(4y)=48y$ مربع كامل لأن

c) $-2(8)(3y)=-48y$ مربع كامل لأن

d) $-4(4)(3y)\neq -48y$ ليس مربع كامل لأن

الحل :

$$bx=-2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$by=-2\sqrt{(9y^2)(64)}=-2(3y)(8)$$

$=-48y$ مربع كامل لأن

الجواب فرع : (c)

سؤال : اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : ax^2+bx+c ليصبح مربعا كاملا :

[8] $Z^2+\cdots\cdots+49$

a) $14Z$ b) $-14Z$ c) $7Z$ d) $-7Z$

الحل :

$$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bZ=2\sqrt{(Z^2)(49)}=2(Z)(7)=14Z$$

الجواب فرع : (a)

[9] $16y^2+40y+\cdots\cdots$

a) 9 b) 25 c) -9 d) -25

الحل :

$$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$40y=2\sqrt{(16y^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$$1600y^2=4(16y^2)(c)$$

$$1600y^2=64y^2(c)$$

$$c=\frac{1600y^2}{64y^2}=25$$

الجواب فرع : (b)

(1)اكتب الحد المفقود من الحدودية$(25x^2 + \cdots + 9)$ لكي يصبح مربا كاملا ثم حلله؟

واجب

(2) هل المقدار يمثل مربعا كاملا $(25x^2 + 30x + 9)$

(3) جد الحد المفقود $(4h^2 + 20h + \cdots.)$ ليصبح مربعا كاملا وحلله ؟

الدرس [4 – 2] : تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

[2 – 4 – 1]	تحليل المقدار الجبري : $x^2 + bx + c$

طريقة حل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة :

1) تتكون من قوسين صغيرين نضع إشارة الحد الثاني في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثاني .

2) نحلل الحد الأول الى حاصل ضرب حدين متشابهين ووضع كل حد في بداية كل قوس .

3) نحلل الحد الأخير (الثالث) الى حاصل ضرب عددين حيث اذا كانت الإشارات متشابهة نجمع أما اذا كانت الاشارات مختلفة نطرح .

4) للتأكد من صحة الحل يجب ان يكون حاصل ضرب الوسطين ± حاصل ضرب الطرفين = الحد الوسط

سؤال : ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمترا مربعا ؟

الحل :

الحد لوسط : $+7x + 3x = +10x$ $\qquad x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$

سؤال : حلل المقادير الآتية الى أبسط صورة :

[1] $y^2 + y - 12 = (y + 4)(y - 3)$ الحد الوسط : $-3y + 4y = +y$

[2] $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$ الحد الوسط : $-6x - 3x = -9x$

[3] $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$ الحد الوسط : $-3y + 9y = +6y$

[4] $x^2 - xy - 20y^2 = (x - 5y)(x + 4y)$ الحد الوسط : $+4xy - 5xy = -xy$

[5] $15 - 8Z + Z^2 = (5 - Z)(3 - Z)$ الحد الوسط : $-5Z - 3Z = -8Z$

[2 − 4 − 2]	تحليل المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

$6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$ [1] الحد الوسط : $+14x + 3x = +17x$

$7y^2 - 26y - 8 = (y - 4)(7y + 2)$ [2] الحد الوسط : $+2y - 28y = -26y$

$3Z^2 - 17Z + 10 = (3Z - 2)(Z - 5)$ [3] الحد الوسط : $-15Z - 2Z = -17Z$

$4v^2 - v - 3 = (v - 1)(4v + 3)$ [4] الحد الوسط : $+3V - 4V = -V$

$15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$ [5] الحد اوسط : $+5h + 6h = +11h$

$3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$ [6] الحد الوسط : $-9xy - xy = -10xy$

$6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$ [7] الحد الوسط : $-3x - 14x = -17x$

تأكد من فهمك

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

1 $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$	4 $3 + 2Z - Z^2 = (1 + Z)(3 - Z)$
2 $1 - 2Z + Z^2 = (1 - Z)(1 - Z)$	5 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$
3 $x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$	6 $15 - 8Z + Z^2 = (5 - Z)(3 - Z)$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

1 $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$	5 $5y^2 - y - 6 = (5y - 6)(y + 1)$
2 $3y^2 - 14y + 8 = (3y - 2)(y - 4)$	6 $6 + 29Z - 5Z^2 = (1 + 5Z)(6 - Z)$
3 $3x^2 - 10x + 8 = (3x - 4)(x - 2)$	7 $x^2 - 9xy + 20y^2 = (x - 4y)(x - 5y)$
4 $8 - 25Z + 3Z^2 = (8 - Z)(1 - 3Z)$	8 $3y^2 - 19yx - 14x^2 = (y - 7x)(3y + 2x)$

سؤال : ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

1 $x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$	3 $y^2 - 12y + 20 = (y - 2)(y - 10)$
2 $6x^2 - 7x + 2 = (2x - 1)(3x - 2)$	4 $20 - 7y - 3y^2 = (5 - 3y)(4 + y)$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية بأبسط صورة :

2/ 2022

19 $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

20 $y^2 - 5y + 6 = (y - 3)(y - 2)$

21 $24 - 2Z - Z^2 = (4 - Z)(6 + Z)$

22 $3 + 2Z - Z^2 = (1 + Z)(3 - Z)$

23 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

24 $36 - 15Z + Z^2 = (12 - Z)(3 - Z)$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

1 $2x^2 + 12x - 14 = 2(x^2 + 6x - 7)$
$= 2(x + 7)(x - 1)$

2 $4y^2 - 6y + 2 = 2(2y^2 - 3y + 1)$
$= 2(2y - 1)(y - 1)$

3 $10 + 9Z - 9Z^2 = (2 + 3Z)(5 - 3Z)$
$= 2(3y - 2)(3y + 1)$

4 $2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$

5 $13y^2 - 11y - 2 = (y - 1)(13y + 2)$

6 $50 - 20Z + 2Z^2 = 2(25 - 10Z + Z^2)$
$= 2(5 - Z)(5 - Z)$

7 $30x^2 - xy - y^2 = (5x - y)(6x + y)$

8 $16y^2 - 2yx - 3x^2 = (2y - x)(8y + 3x)$

9 $6Z^2 - 2Zx - 4x^2 = 2(3Z^2 - Zx - 2x^2)$
$= 2(Z - x)(3Z + 2x)$

سؤال : ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

1 $x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$

2 $x^2 - x - 56 = (x + 7)(x - 8)$

3 $35 + 3y - 2y^2 = (5 - y)(7 + 2y)$

4 $3x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(3x - 2)$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **قلعة الأخيضر :** قلعة الأخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة الى يومنا هذا الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل . ما أبعاد هذا السور الذي يحيط بالقلعة التي مساحتها $6x^2 - 39x + 60$ مترا مربعا ؟

الحل :

$6x^2 - 39x + 60 = 3(2x^2 - 13x + 20) = 3(2x - 5)(x - 4)$

أبعاد السور هو : $(x - 4)$, $(2x - 5)$

سؤال : **العاب ترفيهية :** تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 3$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب اذ t يمثل زمن الحركة . وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى . حلل المقدار .

الحل :

$5t^2 + 5t - 30 = 5(t^2 + t - 6) = 5(t + 6)(t - 5)$

سؤال : مترو الأنفاق : يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير القطارات وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية ويتألف كل قطار من عدة عربات فإذا كان المقدار : $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع فما أبعادها ؟

الحل :

$14y^2 - 23y + 3 = (7y - 1)(2y - 3)$

أبعاد العربة هي : $(2y - 3)$, $(7y - 1)$

فـــــــــكر

سؤال : تحد : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

i) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (4x^3 + 4x^2) + (-9x - 9) = 4x^2(x + 1) - 9(x + 1)$
$= (x + 1)(4x^2 - 9) = (x + 1)(2x + 3)(2x - 3)$

سؤال : أصحح الخطأ : حلل سعد المقدار : $6Z^2 - 16Z - 6$ كما يأتي : $6Z^2 - 16Z - 6 = (3Z - 1)(2Z +$ 6) اكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل :

خطأ الحد الوسط $-16Z \neq +16Z = -2Z + 18Z$

الحد الوسط : $-16Z = -18Z + 2Z$

$6Z^2 - 16Z - 6 = (2Z - 6)(3Z + 1)$

سؤال : حس عددي : أيمكن تحديد ما اذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار : $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار ؟ وضح اجابتك .

الحل :

تكون إشارة القوسين متشابهة (سالبة) حيث نضع إشارة الحد الثاني $(-)$ في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثالث $(-)$

سؤال : أكتب // الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

$6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z \cdots 8)(2Z \cdots 7)$

الحل :

$6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z - 8)(2Z + 7)$ الحد الوسط : $+21Z - 16Z = +5Z$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ الحد الوسط : $3x - 4x = -x$

ii) $y^2 - 8y + 15 = (y - 5)(y - 3)$ الحد الوسط : $-3y - 5y = -8y$

تدريب 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $y^2 - y - 20 = (y - 5)(y + 4)$ الحد الوسط : $+4y - 5y = -y$

ii) $x^2 - 17x + 30 = (x - 15)(x - 2)$ الحد الوسط : $-2x - 15x = -17x$

مثال 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $5x^2 + 13x - 6 = (x + 3)(5x - 2)$ الحد الوسط : $-2x + 15x = +13x$

تدريب 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $7 - 23Z + 6Z^2 = (7 - 2Z)(1 - 3Z)$ الحد الوسط : $-21Z - 2Z = -23Z$

اختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

[1] $x^2 + 7x + 12$

a) $(x - 3)(x + 4)$ b) $(x + 3)(x + 4)$

c) $(x - 1)(x + 7)$ d) $(x - 3)(x - 4)$

الحل :

$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

الجواب فرع : (b)

[2] $x^2 - 5x - 36$

a) $(x - 6)(x + 6)$ b) $(x + 12)(x - 3)$

c) $(x - 9)(x + 4)$ d) $(x + 9)(x - 4)$

الحل :

$x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$

الجواب فرع : (c)

[3] $y^2 + 4y - 21$

a) $(y - 7)(y + 3)$ b) $(y + 7)(y - 3)$

c) $(y - 7)(y - 3)$ d) $(y + 7)(y + 3)$

الحل :

$y^2 + 4y - 21 = (y + 7)(y - 3)$

الجواب فرع : (b)

واجب

حلل/ $5y^2 - y - 6$

حلل مايأتي/

(1) $20 - 7y - 3y^2$

(2) $x^2 - xy - 20y^2$

[4] $4x^2 + 10x + 6$

a) $(x-6)(4x+1)$ b) $(4x+2)(x-3)$

c) $(4x-6)(x-1)$ d) $(2x+3)(2x+2)$

الحل :

$4x^2 + 10x + 6 = (2x+3)(2x+2)$

الجواب فرع : (d)

[5] $24y^2 - 2y - 1$

a) $(4y-1)(6y+1)$ b) $(2y-1)(12y-1)$

c) $(4y+1)(6y-1)$ d) $(3y-1)(8y+1)$

الحل :

$24y^2 - 2y - 1 = (4y-1)(6y+1)$

الجواب فرع : (a)

[6] $10x^2 - 11x + 1$

a) $(5x-1)(2x+1)$ b) $(10x+1)(x-1)$

c) $(5x+1)(2x-1)$ d) $(10x-1)(x-1)$

الحل :

$10x^2 - 11x + 1 = (10x-1)(x-1)$

الجواب فرع : (d)

[7] $22 + 3Z - 4Z^2$

a) $(11+4Z)(2-Z)$ b) $(22-4Z)(1+Z)$

c) $(11-4Z)(2+Z)$ d) $(22+8Z)(1-Z)$

الحل :

$22 + 3Z - 4Z^2 = (11-4Z)(2+Z)$

الجواب فرع : (c)

سؤال : ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً :

[8] $x^2 + 15x + 26 = (x \cdots 2)(x \cdots 13)$

a) $(x-2)(x-13)$ b) $(x-2)(x+13)$

c) $(x+2)(x+13)$ d) $(x+2)(x-13)$

الجواب فرع : (c)

[9] $4y^2 - 2y - 12 = (2y \cdots 3)(2y \cdots 4)$

a) $(2y-3)(2y+4)$ b) $(2y+3)(2y+4)$

c) $(2y-3)(2y-4)$ d) $(2y+3)(2y-4)$

الجواب فرع : (d)

[10] $48 - 30Z + 3Z^2 = (6 \cdots 3Z)(8 \cdots Z)$

a) $(6-3Z)(8-Z)$ b) $(6+3Z)(8+Z)$

c) $(6-3Z)(8+Z)$ d) $(6+3Z)(8-Z)$

الجواب فرع : (a)

الدرس [2 – 5] : تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

[2 – 5 – 1] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$1 = 1^3 \ , \quad 8 = 2^3 \ , \quad 27 = 3^3 \ , 64 = 4^3 \ , \quad 125 = 5^3 \ , \ 216 = 6^3$$

سؤال : ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول ضلعه 3cm والثاني طول ضلعه 4cm

الحل :

حجم المكعب $V = L^3$

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3 = (3 + 4)(3^2 - 3 \times 4 + 4^2)$$
$$= (7)(9 - 12 + 16) = (7)(13) = 91 \ cm^3$$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

[1] $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2) = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

[2] $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

[3] $8Z^3 + 27 = 2^3Z^3 + 3^3 = (2Z + 3)(4Z^2 - 6Z + 9)$

[4] $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

[5] $\frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$

[6] $\frac{1}{2}y^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$

[7] $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

[2 – 5 – 2] تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$1 = 1^3 \ , \quad 8 = 2^3 \ , \quad 27 = 3^3 \ , 64 = 4^3 \ , \quad 125 = 5^3 \ , \ 216 = 6^3$$

سؤال : حوض مكعب الشكل طول ضلعه 1m مملوء بالماء أفرغ الماء منه في حوض اخر اكبر منه مكعب الشكل طول ضلعه 1.1m ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج اليها ليمتلئ الحوض الكبير ؟

الحل :

كمية الماء الإضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير - حجم المكعب الصغير

$$v_1 - v_2 = (1.1)^3 - 1^3 = (1.1-1)[(1.1)^2 - 1.1\times 1 + 1^2]$$
$$= (0.1)(1.21 + 1.1 + 1) = (0.1)(3.31) = 0.331m^3$$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الأتية الى أبسط صورة :

[1] $x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$

[2] $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y-4)(y^2+4y+16)$

[3] $27Z^3 - 8 = 3^3Z^3 - 2^3 = (3Z-2)(9Z^3+6Z+4)$

[4] $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

[5] $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t-3)(t^2+3t+9)$

[6] $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6-n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

[7] $1 - 0.125Z^3 = 1^3 - (0.5)^3Z^3 = (1-0.5Z)(1+0.5Z+0.25Z^2)$

[8] $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4-m)(16+4m+m^2)$

تأكد من فهمك

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

1 $y^3 + 216 = y^3 + 6^3 = (y+6)(y^2-6y+36)$

2 $x^3 + Z^3 = (x+Z)(x^2 - xZ + Z^2)$

3 $125 + 8Z^3 = 5^3 + 2^3Z^3 = (5+2Z)(25 - 10Z + 4Z^2)$

4 $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8} = \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right)$

5 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

6 $\frac{1}{3}t^3 + 9 = \frac{1}{3}(y^3 + 27) = \frac{1}{3}(t^3 + 3^3) = \frac{1}{3}(t+3)(t^2-3t+9)$

7 $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5+v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

8 $1 + 0.008Z^3 = 1^3 + (0.2)^3Z^3 = (1+0.2Z)(1-0.2Z+0.04Z^2)$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

1 $a^3 - 8^3 = (a-8)(a^2+8a+64)$

2 $8y^3 - 64 = 8(y^3-8) = 8(y^3-2^3) = 8(y-2)(y^2+2y+4)$

3 $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{c^3} - \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{4}\right)$

4 $\frac{1}{2}v^3 - 4 = \frac{1}{2}(v^3-8) = \frac{1}{2}(v^3-2^3) = \frac{1}{2}(v-2)(v^2+2v+4)$

5 $0.125 - m^3 = (0.5)^3 - m^3 = (0.5-m)(0.25+0.5m+m^2)$

6 $25 - \frac{1}{5}n^3 = \frac{1}{5}(125-n^3) = \frac{1}{5}(5^3-n^3) = \frac{1}{5}(5-n)(25+5n+n^2)$

7 $3b^3 - 81 = 3(b^3-27) = 3(b^3-3^3) = 3(b-3)(b^2+3b+9)$

8 $0.216v^3 - 0.008t^3 = (0.6)^3v^3 - (0.2)^3t^3 = (0.6v-0.2t)(0.36v^2+0.12vt+0.04t^2)$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

1 $6^3 + x^3 = (6+x)(6-6x+x^2)$

2 $27 + 64x^3 = 3^3 + 4^3x^3 = (3+4x)(9-12x+16x^2)$

3 $125y^3 + 1 = 5^3y^3 + 1^3 = (5y+1)(25y^2-5y+1)$

4 $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3 = \frac{1}{4^3} + \frac{2^3}{5^3}y^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{20}y + \frac{4}{25}y^2\right)$

5 $\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{b^3} + \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{4}\right)$

6 $\frac{1}{5}v^3 + 25 = \frac{1}{5}(v^3+125) = \frac{1}{5}(v^3+5^3) = \frac{1}{5}(v+5)(v^2-5v+25)$

7 $0.027 + 27n^3 = (0.3)^3 + 3^3n^3 = (0.3+3n)(0.09+0.9n+9n^2)$

8 $0.125x^3 + 0.008y^3 = (0.5)^3x^3 + (0.2)^3y^3 = (0.5x+0.2y)(0.25x^2-0.1xy+0.04y^2)$

سؤال : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

1 $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y-4)(y^2+4y+16)$

2 $27y^3 - 8 = 3^3y^3 - 2^3 = (3y-2)(9y^2+6y+4)$

3 $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8} = \frac{1}{x^3} - \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} + \frac{9}{4}\right)$

4 $9 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}(27 - n^3) = \frac{1}{3}(3^3 - n^3) = \frac{1}{3}(3-n)(9+3n+n^2)$

5 $0.001 - v^3 = (0.1)^3 - v^3 = (0.1 - v)(0.01 + 0.1v + v^2)$

6 $4 - \frac{1}{2}t^3 = \frac{1}{2}(8 - t^3) = \frac{1}{2}(2^3 - t^3) = \frac{1}{2}(2-t)(4+2t+t^2)$

7 $25c^3 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125c^3 - 1) = \frac{1}{5}(5^3c^3 - 1^3) = \frac{1}{5}(5c-1)(25c^2+5c+1)$

8 $0.001x^3 - 0.008y^3 = (0.1)^3x^3 - (0.2)^3y^3$
$= (0.1x - 0.2y)(0.01x^2 + 0.02xy + 0.04y^2)$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : مكتبة : مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في المانيا كما أنها من أكثر المكتبات تماشيا مع متطلبات التعليم الحديثة . بناية المكتبة على شكل مكعب طول ضلعه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر . حلل المقدار الذي يمثل طول الضلع .

الحل :

$$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 27) = \frac{1}{2}(y^3 - 3^3) = \frac{1}{2}(y-3)(y^2+3y+9)$$

سؤال : حوض سمك : حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ مترا مكعبا وضع في داخل حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب ملئ بالماء كاملا . اكتب مقدار حجم الماء ثم حلله .

الحل :

$$25x^3 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125x^3 + 1) = \frac{1}{5}(5^3x^3 + 1^3) = \frac{1}{5}(5x+1)(25x^2 - 5x + 1)$$

سؤال : سكن : بدأت المنازل تأخذ أشكالا مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصممت هذه المنازل عل شكل مكعبات . فاذاكان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب . اكتب حجم المنزلين معا ثم حلل المقدار

الحل :

$$v_1 + v_2 = \frac{8}{a^3} + \frac{27}{b^2} = \frac{2^3}{a^3} + \frac{3^3}{b^3} = \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)\left(\frac{4}{a^2} - \frac{6}{ab} + \frac{9}{b^3}\right)$$

فكر

سؤال : **تحد :** حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $0.002Z^3 - 0.016y^3 = 0.002(Z^3 - 8y^3) = 0.002(Z^3 - (2)^3y^3)$

$= 0.002(Z - 2y)(Z^2 + 2Zy + 4y^2)$

سؤال : **صحح الخطأ :** حللت بشرى المقدار : $8v^3 - 0.001$ كما يأتي :

$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$:

اكتشف خطأ بشرى وصححه .

الحل :

$8v^3 - 0.001 = 2^3v^3 - (0.1)^3 = (2v - 0.1)(4v^2 + 0.2v + 0.01)$

سؤال : **حس عددي :** هل يمكن جمع العددين 8, 27 بطريقة تحليل مجموع مكعبين ؟ وضح اجابتك

الحل : نعم

$8 + 27 = 2^3 + 3^3 = (2 + 3)(4 - 6 + 9) = (5)(7) = 35$

سؤال : **اكتب //** الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

$125 - x^3 = (5 \cdots x)(25 \cdots 5x \cdots x^2)$

الحل : $125 - x^3 = (5 - x)(25 + 5x + x^2)$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

ii) $8Z^3 + 27 = 2^3Z^3 + 3^3 = (2Z + 3)(4Z^2 - 6Z + 9)$

iii) $\frac{1}{Z^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2} - \frac{1}{4Z} + \frac{1}{16}\right)$

تدريب 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

ii) $8Z^3 + 125 = 2^3Z^3 + 5^3 = (2Z + 5)(4Z^2 - 10Z + 25)$

ii) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

iv) $\frac{1}{Z^3}-\frac{1}{27}=\frac{1}{Z^3}-\frac{1}{3^3}=\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{3Z}+\frac{1}{9}\right)$

اختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

[1] $8+x^3$

a) $(2-x)(4+2x+x^2)$

b) $(2+x)(4-2x+x^2)$

c) $(2-x)(4-2x+x^2)$

d) $(2+x)(4+2x+x^2)$

الجواب فرع : (b)

[2] $8y^3+27$

a) $(2y+3)(4y^2+6y+9)$

b) $(2y-3)(4y^2+6y+9)$

c) $(2y+3)(4y^2-6y+9)$

d) $(2y-3)(4y^2-6y+9)$

الجواب فرع : (c)

[3] $\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{64}$

a) $\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

b) $\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

c) $\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

d) $\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

الجواب فرع : (d)

[4] $\frac{27}{125}+\frac{8}{x^3}$

a) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}+\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}-\frac{4}{x^2}\right)$

الجواب فرع : (c)

[5] $0.027+Z^3$

a) $(0.03+Z)(0.09-0.3Z+Z^2)$

b) $(0.03+Z)(0.009-0.03Z+Z^2)$

c) $(0.3+Z)(0.9-0.3Z+Z^2)$

d) $(0.3+Z)(0.09-0.3Z+Z^2)$

الجواب فرع : (c)

[6] $\frac{8}{y^3}-\frac{1}{27}$

a) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}-\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

b) $\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}-\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

c) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}+\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

d) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}+\frac{2}{3y}-\frac{1}{9}\right)$

الجواب فرع : (c)

[7] $9-\frac{1}{3}Z^3$

a) $\frac{1}{3}(3-Z)(9+3Z-Z^2)$

b) $\frac{1}{3}(3-Z)(9+3Z+Z^2)$

[8] $0.008x^3-1$

a) $(0.02x-1)(0.04x^2+0.002x+1)$

b) $(0.02x-1)(0.04x^2+0.02x+1)$

c) $(0.2x+1)(0.4x^2-0.2x+1)$

d) $(0.2x-1)(0.04x^2+0.2x+1)$

الجواب فرع : (d)

c) $\frac{1}{3}(3+Z)(9+3Z+Z^2)$ d) $\frac{1}{3}(3-Z)(9-3Z+Z^2)$ الجواب فرع : (b)	

الدرس [6 – 2] : تبسيط المقادير الجبرية النسبية

[6 – 2 – 1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

ملاحظـــــــــــة :

1) نحلل كل حدودية بطرق التحليل السابقة للبسط والمقام .

2) اذا وجدت علامة القسمة (÷) نبدل القسمة الى ضرب (×) وقلب الحد ما بعد القسمة .

3) نختصر الحدود المتشابهة بين البسط والمقام .

4) نضرب البسط في البسط والمقام في المقام .

سؤال : اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار .

الحل :

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x-6}{x^2-x-6} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

سؤال : أكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[1] $\frac{y^2-4}{y^2-4y+4} = \frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y-2)} = \frac{y+2}{y-2}$

[2] $\frac{5Z+10}{Z-3} \times \frac{Z^3-27}{Z^2+6Z+8} = \frac{5(Z+2)}{Z-3} \times \frac{(Z-3)(Z^2+2Z+9)}{(Z+2)(Z+4)} = \frac{5(Z^2+3Z+9)}{Z+4}$

[3] $\frac{16-x^2}{3x+5} \times \frac{3x^2+2x-5}{x^2+3x-4} = \frac{(4+x)(4-x)}{3x+5} \times \frac{(3x+5)(x-1)}{(x+4)(x-1)} = 4-x$

[4] $\frac{8+t^3}{4-2t+t^2} \div \frac{(2+t)^3}{t^2+9t+14} = \frac{8+t^3}{4-2t+t^2} \times \frac{t^2+9t+14}{(2+t)^3}$

$= \frac{(2+t)(4-2t+t^2)}{4-2t+t^2} \times \frac{(t+2)(t+7)}{(2+t)^2(2+t)} = \frac{t+7}{2+t} = \frac{t+7}{t+2}$

[2 – 6 – 2]	تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

خطوات الحل :

1) نحلل البسط والمقام بأحدي طرق التحليل السابقة ونختصر العوامل المتشابهة بين بسط ومقام نفس الحدودية .

2) نلاحظ المقامات اذا كانت متشابهة نجري عملية الجمع أو الطرح للبسط وبأخذ احدى المقامات .

3) اذا كانت المقامات مختلفة (غير متشابهة) نوحدها ذلك بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وبدون تكرار واستخراج البسط الجديد

سؤال : **اكتب كل مقدار من المقادير الأتية بأبسط صورة :**

2/2023-2/2021

1/ 2021

[1] $\frac{y^2}{y+2}-\frac{4}{y+2}=\frac{y^2-4}{y+2}=\frac{(y+2)(y-2)}{y+2}=y-2$

[2] $\frac{7x-14}{x^2-4}+\frac{5}{x+2}=\frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{5}{x+2}=\frac{7}{x+2}+\frac{5}{x+2}=\frac{7+5}{x+2}=\frac{12}{x+2}$

[3] $\frac{4Z}{2Z-5}-\frac{Z}{Z+3}=\frac{4Z(Z+3)-Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{4Z^2+12Z-2Z^2+5Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

$=\frac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{Z(2Z+17)}{(2Z-5)(Z+3)}$

[4] $\frac{t^2+2t+4}{t^3-8}+\frac{12}{3t-6}=\frac{t^2+2t+4}{(t-2)(t^2+2t+4)}+\frac{12}{3(t-2)}=\frac{1}{t-2}+\frac{4}{t-2}=\frac{5}{t-2}$

[5] $\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{v^2-16}=\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{(v+4)(v-4)}=\frac{8(v-4)+2(v+4)-1}{(v+4)(v-4)}$

$=\frac{8v-32+2v+8-1}{(v+4)(v-4)}=\frac{10v-25}{(v+4)(v-4)}=\frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$

تأكد من فهمك

سؤال : اكتب كل مقدار من المقادير التلية بأبسط صورة :

وزاري

[1] $\frac{2Z^2-4Z+2}{Z^2-7Z+6}=\frac{2(Z^2-2Z+1)}{(Z-6)(Z-1)}=\frac{2(Z-1)(Z-1)}{(Z-6)(Z-1)}=\frac{2(Z-1)}{(Z-6)}$

[2] $\frac{y^3+27}{y^3-3y^2+9y}=\frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y(y^2-3y+9)}=\frac{y+3}{y}$

[3] $\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{x^2+5x+6}{25x^2-9}=\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{(x+3)(x+2)}{(5x+3)(5x-3)}=\frac{x+2}{5x-3}$

[4] $\frac{Z^2+7Z-8}{Z-1}\times\frac{Z^2-4}{Z^2+6Z-16}=\frac{(Z+8)(Z-1)}{Z-1}\times\frac{(Z+2)(Z-2)}{(Z+8)(Z-2)}=Z+2$

[5] $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-2)}\times\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+3}{x-2}$

[6] $\frac{y^2-25}{y^3-125}\div\frac{y^2+10y+25}{y^2+y-20}=\frac{y^2-25}{y^3-125}\times\frac{y^2+y+25}{y^2+10y+25}$

$=\frac{(y+5)(y-5)}{(y-5)(y^2+5y+25)}\times\frac{y^2+y+25}{(y+5)(y+5)}=\frac{1}{y+5}$

[7] $\frac{8-Z^3}{4+2Z+Z^2}\div\frac{(2+Z)^3}{Z^2+9Z+14}=\frac{8-Z^3}{4+2Z+Z^2}\times\frac{Z^2+9Z+14}{(2+Z)^3}$

$=\frac{(2-Z)(4+2Z+Z^2)}{4+2Z+Z^2}\times\frac{(Z+7)(Z+2)}{(2+Z)^2(2+Z)}=\frac{(2-Z)(Z+7)}{(2+Z)^2}$

[8] $\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\div\frac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}=\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\times\frac{y^2+2y-3}{y^2+y-2}=\frac{2y(y-1)}{(y+3)(y-3)}\times\frac{(y+3)(y-1)}{(y+2)(y-1)}=\frac{2y(y-1)}{(y-3)(y-2)}$

وزاري

سؤال : اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صوره :

[9] $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}=\frac{2(x-1)+3(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

$=\frac{2x-2+3x+9}{(x+3)(x-3)(x-1)}=\frac{5x+7}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

[10] $\frac{2y^3-128}{y^3+4y^2+16y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y^3-64)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y-4)(y^2+4y+16)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y-4)}{y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2y-8-y+1}{y}=\frac{y-7}{y}$

[11] $\frac{Z^2+Z+1}{Z^4-Z}-\frac{Z+3}{Z^2+2Z-3}=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z^3-1)}-\frac{Z+3}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z-1)(Z^2+Z+1)}-\frac{1}{(Z-1)}$

$=\frac{1}{Z(Z-1)}-\frac{1}{(Z-1)}=\frac{1-Z}{Z(Z-1)}=\frac{-(Z-1)}{Z(Z-1)}=\frac{-1}{Z}$

[12] $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-1=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}-1=\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}=\frac{x+1-x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$

[13] $\frac{5y}{y^2-1}-\frac{6}{y^2-1}+\frac{y}{y^2-1}=\frac{5y-6+y}{y^2-1}=\frac{6y-6}{(y+1)(y-1)}=\frac{6(y-1)}{(y+1)(y-1)}=\frac{6}{y+1}$

[14] $\frac{3}{Z-1}+\frac{2}{Z+3}+\frac{8}{Z^2+2Z-3}=\frac{3}{Z-1}+\frac{2}{Z+3}+\frac{8}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{3(Z+3)+2(Z-1)+8}{(Z+3)(Z-1)}$

$=\frac{3Z+9+2Z-2+8}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5Z+15}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5(Z+3)}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5}{Z-1}$

تدرب وحل التمرينات

سؤال: اكتب كل مقدار من المقادير الأتية بأبسط صورة:

[17] $\frac{x+5}{12x}\times\frac{6x-30}{x^2-25}=\frac{x+5}{12x}\times\frac{6(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{1}{2x}$ 2021 /ت

[18] $\frac{y+3}{2y^2+6y+18}\times\frac{y^3-27}{y^2-9}=\frac{y+3}{2(y^2+3y+9)}\times\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y+3)(y-3)}=\frac{1}{2}$

[19] $\frac{3-x}{4-2x}\times\frac{x^2+x-6}{9-x^2}=\frac{3-x}{2(2-x)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(3+x)(3-x)}=\frac{x-2}{-2(x-2)}=\frac{-1}{2}$

[20] $\frac{Z^2-Z-12}{9+3Z}\times\frac{3}{Z^2-16}=\frac{(Z-4)(Z+3)}{3(3+Z)}\times\frac{3}{(Z+4)(Z-4)}=\frac{1}{(Z+4)}$

[21] $\frac{y+2}{2y-4}\div\frac{y^3+8}{y-2}=\frac{y+2}{2y-4}\times\frac{y-2}{y^3+8}=\frac{y+2}{2(y-2)}\times\frac{(y-2)}{(y+2)(y^2-2y+4)}=\frac{1}{2(y^2-2y+4)}$ 2019 /ت

[22] $\frac{2x^2-x-15}{4x^2-20x+25}\div\frac{x-3}{4x^2-25}=\frac{2x^2-x-15}{4x^2-20x+25}\times\frac{4x^2-25}{x-3}=$

$=\frac{(x-3)(2x+5)}{(2x-5)(2x-5)}\times\frac{(2x+5)(2x-5)}{x-3}=\frac{(2x+5)^2}{2x-5}$

[23] $\frac{y^2-7y}{y^3-27}\div\frac{y^2-49}{y^2+3y+9}=\frac{y^2-7y}{y^3-27}\times\frac{y^2+3y+9}{y^2-49}=\frac{y(y-7)}{(y-3)(y^2+3y+9)}\times\frac{y^2+3y+9}{(y+7)(y-7)}$

$=\frac{y}{(y-3)(y+7)}$

[24] $\frac{64-Z^3}{32+8Z+2Z^2}\div\frac{(4-Z)^2}{16-Z^2}=\frac{64-Z^3}{32+8Z+2Z^2}\times\frac{16-Z^2}{(4-Z)^2}$

$=\frac{(4-Z)(16+4Z+Z^2)}{2(16+4Z+Z^2)}\times\frac{(4+Z)(4-Z)}{(4-Z)(4-Z)}=\frac{4+Z}{2}$

[25] $\frac{5}{x^2-36}-\frac{2}{x^2-12x+36}=\frac{5}{(x+6)(x-6)}-\frac{2}{(x-6)^2}=\frac{5(x-6)-2(x+6)}{(x+6)(x-6)^2}$

$=\frac{5x-30-2x-12}{(x+6)(x-6)^2}=\frac{3x-42}{(x+6)(x-6)^2}$

[26] $\frac{y^2-y}{y^3-1}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y}{y^2+y+1}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y-1}{y^2+y+1}$

[27] $\frac{1-Z^2}{Z^3+1}+\frac{Z+3}{Z^2-Z+1}=\frac{(1+Z)(1-Z)}{(Z+1)(Z^2-Z+1)}+\frac{Z+3}{Z^2-Z+1}=\frac{1-Z}{Z^2-Z+1}+\frac{Z+3}{Z^2-Z+1}$

$=\frac{1-Z+Z+3}{Z^2-Z+1}=\frac{4}{Z^2-Z+1}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **مكتبة :** اذا كان المقدار الجبري x^2-4 يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة والمقدار الجبري x^2+x-6 يمثل عدد الكتب الأدبية فيها . اكتب نسبة الكتب العلمية الى الكتب الأدبية بأبسط صورة .

الحل :

2/2019

$$\frac{\text{عدد الكتب العلمية}}{\text{عدد الكتب الأدبية}}=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x+2}{x+3}$$

سؤال : **هندسة :** مستطيل أبعاده 5, 3 أمتار وسع الى مستطيل أكبر وذلك بأحاطته بممر عرضه x متر . اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع الى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع الى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة .

الحل :

طول المستطيل قبل التوسيع $=3$, طول المستطيل بعد التوسيع $=x+3$

عرض المستطيل قبل التوسيع $=5$, عرض المستطيل بعد التوسيع $=x+5$

$$\frac{\text{طول المستطيل قبل التوسيع}}{\text{طول المستطيل بعد التوسيع}}+\frac{\text{عرض المستطيل قبل التوسيع}}{\text{عرض المستطيل بعد التوسيع}}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=\frac{3(x+5)+5(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$=\frac{3x+15+5x+15}{(x+3)(x+5)}=\frac{8x+30}{(x+3)(x+5)}$$

سؤال : **العاب نارية :** المقدار الجبري $20+15t-5t^2$ يمثل ارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 مترا اذ t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني الى الهدف . والمقدار الجبري $4+19t-5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار . اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى الى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة .

الحل :

$$\frac{\text{ارتفاع القذيفة الأولى}}{\text{ارتفاع القذيفة الثانية}}=\frac{20+15t-5t^2}{4+19-5t^2}=\frac{5(4+3t-t^2)}{(1+5t)(4-t)}=\frac{5(1+t)(4-t)}{(1+5t)(4-t)}=\frac{5(1+t)}{1+5t}$$

فـــــــــــكر

سؤال تحد : بسط كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية :

i) $\frac{y^2-5}{2y^3-16} \div \frac{y-\sqrt{5}}{2y^2+4y+8} = \frac{y^2-5}{2y^3-16} \times \frac{2y^2+4y+8}{y-\sqrt{5}} = \frac{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}{2(y^3-8)} \times \frac{2(y^2+2y+4)}{y-\sqrt{5}}$

$= \frac{y+\sqrt{5}}{(y-2)(y^2+2y+4)} \times \frac{y^2+2y+4}{1} = \frac{y+\sqrt{5}}{y-2}$

سؤال : أصحح الخطأ : بسط سماح المقدار الجبري وكتبته بأبسط صورة كما يأتي :

$\frac{Z^2-Z-30}{5+Z} \times \frac{2Z+12}{Z^2-36} = 1$

اكتشف خطأ سماح وصححه .

الحل :

$\frac{Z^2-Z-30}{5+Z} \times \frac{2Z+12}{Z^2-36} = \frac{(Z-6)(Z+5)}{5+Z} \times \frac{2(Z+6)}{(Z+6)(Z-6)} = 2$

سؤال : حس عددي : ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم ؟ وضح ذلك .

$\frac{5}{x^2-49} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)}$

الحل :

$\frac{5}{x^2-49} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)} = \frac{5}{(x+7)(x-7)} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)} = \frac{5-4}{(x+7)(x-7)} = \frac{1}{(x+7)(x-7)}$

سؤال : أكتب // قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة : $\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12} \div \frac{Z^2-16}{2Z+8}$

الحل :

$\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12} \div \frac{Z^2-16}{2Z+8} = \frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12} \times \frac{2Z+8}{Z^2-16} = \frac{Z^2+Z-6}{2(Z^2+Z-6)} \times \frac{2(Z+4)}{(Z+4)(Z-4)} = \frac{1}{Z-4}$

مراجعة الفصل

مثال 1 // اكتب كل مقدار بأبسط صورة :

i) $\frac{x+3}{2x-6}\times\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}=\frac{x+3}{2(x-3)}\times\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9}=\frac{x+3}{2}$

ii) $\frac{125+y^3}{25-5y+y^2}\div\frac{(5+y)^3}{y^2+10y+25}=\frac{125+y^3}{25-5y+y^2}\times\frac{y^2+10y+25}{(5+y)^3}$

$=\frac{(5+y)(25-5y+y^2)}{25-5y+y^2}\times\frac{(y+5)(y+5)}{(5+y)^3}=1$

iii) $\frac{3x-15}{x^2-25}+\frac{2}{x+5}=\frac{3(x-5)}{(x+5)(x-5)}+\frac{2}{x+5}=\frac{3}{x+5}+\frac{2}{x+5}=\frac{5}{x+5}$

تدريب 1 // اكتب كل مقدار بأبسط صورة :

i) $\frac{Z^2-4}{Z+2}\times\frac{Z^2+9Z+20}{Z^2+2Z-8}=\frac{(Z+2)(Z-2)}{Z+2}\times\frac{(Z+5)(Z+4)}{(Z+4)(Z-2)}=Z+5$

ii) $\frac{27-x^3}{2x^2+6x+18}\div\frac{(3-x)^2}{x^2-x-6}=\frac{27-x^3}{2x^2+6x+18}\times\frac{x^2-x-6}{(3-x)^2}=\frac{(3-x)(9+3x+x^2)}{2(x^2+3x+9)}\times\frac{(x-3)(x-2)}{(3-x)^2}$

$=\frac{3-x}{2}\times\frac{-(3-x)(x-2)}{(3-x)^2}=\frac{-(x-2)}{2}$

iii) $\frac{4Z}{2Z-5}-\frac{Z}{Z+3}=\frac{4Z(Z+3)-Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{4Z^2+12Z-2Z^2+5Z}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

سؤال : اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[1] $\frac{x+3}{4x}\times\frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{x}$

الحل :

$\frac{x+3}{4x}\times\frac{4x-12}{x^2-9}=\frac{x+3}{4x}\times\frac{4(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x}$

الجواب فرع : (d)

[2] $\frac{y+2}{y^2+2y+4}\times\frac{y^3-8}{y^2-4}$ a) $\frac{1}{y-2}$ b) 1 c) $\frac{1}{y+2}$ d) -1

الحل :

$\frac{y+2}{y^2+2y+4}\times\frac{y^3-8}{y^2-4}=\frac{y+2}{y^2+2y+4}\times\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y+2)(y-2)}=1$

الجواب فرع : (b)

[3] $\frac{Z^2-2Z-15}{9+3Z}\times\frac{5}{Z^2-25}$ a) $\frac{5}{Z+5}$ b) $\frac{3}{5(Z+5)}$ c) $\frac{5}{3(Z+5)}$ d) $\frac{3}{Z+5}$

الحل :

$\frac{Z^2-2Z-15}{9+3Z}\times\frac{5}{Z^2-25}=\frac{(Z-5)(Z+3)}{3(3+Z)}\times\frac{5}{(Z+5)(Z-5)}=\frac{5}{3(Z+5)}$

[4] $\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35}\div\frac{x-7}{4x^2-25}$ a) $x-7$ b) $2x-5$ c) $x+7$ d) $2x+5$

الحل الجواب فرع : (b)

$\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35}\div\frac{x-7}{4x^2-25}=\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35}\times\frac{4x^2-25}{x-7}=\frac{(x+7)(x-7)}{(x+7)(2x-5)}\times\frac{(2x+5)(2x-5)}{x-7}$

$=2x+5$

[5] $\frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \div \frac{(1-Z)^2}{1-Z^2}$ a) $1-Z$ b) $1+Z$ c) $1+Z+Z^2$ d) $1-Z+Z^2$

الحل :

$$\frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \div \frac{(1-Z)^2}{1-Z^2} = \frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \times \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} == \frac{(1-Z)(1+Z+Z^2)}{1+Z+Z^2} \times \frac{(1+Z)(1-Z)}{(1-Z)^2} = 1+Z$$

الجواب فرع : (b)

[6] $\frac{3+y}{2y-10} \div \frac{y^3+27}{5-y}$ a) $\frac{-1}{2(y^2-3y+9)}$ b) $\frac{1}{2(y^2-3y+9)}$ c) $\frac{-1}{2(y^2+3y+9)}$ d) $\frac{1}{2(y^2+3y+9)}$

الحل

$$\frac{3+y}{2y-10} \div \frac{y^3+27}{5-y} = \frac{3+y}{2y-10} \times \frac{5-y}{y^3+27} = \frac{3+y}{2(y-5)} \times \frac{-(y-5)}{(y+3)(y^2-3y+9)} = \frac{-1}{2(y^2-3y+9)}$$

الجواب فرع : (a)

سؤال : اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[7] $\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$

الحل :

$$\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1} = \frac{2y^2+1}{(y-1)(y^2+y+1)} - \frac{y}{y^2+y+1} = \frac{2y^2+1-y(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$
$$= \frac{2y^2+1-y^2+y}{(y-1)(y^2+y+1)} = \frac{y^2+y+1}{(y-1)(y^2+y+1)} = \frac{1}{y-1}$$

الجواب فرع : (c)

[8] $\frac{5-4Z^2}{8Z^3+1} + \frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}$ a) $\frac{2Z-1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ b) $\frac{2Z+1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ c) $\frac{2}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ d) $\frac{4}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$

الحل :

$$\frac{5-4Z^2}{8Z^3+1} + \frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1} = \frac{5-4Z^2}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)} + \frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1} = \frac{5-4Z^2+(2Z-1)(2Z+1)}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$$
$$= \frac{5-4Z^2+4Z^2-1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)} = \frac{4}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$$

الجواب فرع : (d)

[9] $\dfrac{3y+1}{y+4}-\dfrac{y-4}{3y-1}-\dfrac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$

a) $\dfrac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\dfrac{3}{(y+4)(3y-1)}$

c) $\dfrac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\dfrac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

الحل :

$$\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}=\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{(y+4)(3y-1)}$$

$$=\frac{(3y+1)(3y-1)-(y-4)(y+4)-(10+8y^2)}{(y+4)(3y-1)}$$

$$=\frac{9y^2-1-(y^2-16)-10-8y^2}{(y+4)(3y-1)}=\frac{y^2-11-y^2+16}{(y+4)(3y-1)}$$

$$=\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$$

الجواب فرع : (a)

الدرس [7 – 2] : خطة حل المسألة (خطوات الأربع)

تعلم // تخذ المباني الحديثة أشكالا هندسية مختلفة , فندق على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلفة من جوانبها بالزجاج . اذا كان نصف قطر قاعدة المبنى $x-8$ أمتار وارتفاعه $x+12$ مترا . ما المساحة الجانبية للفندق .

أفهم :

ما المعطيات في المسألة؟ مبنى الفندق على شكل أسطوانة، نصف قطر قاعدته x - 8أمتار، وارتفاعه x + 12مترا

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد المساحة الجانبية للفندق

خطط :

كيف تحل المسألة؟ بما أن بناية الفندق مشابهة للشكل الأسطواني الدائري القائم، لذا نطبق قانون المساحة الجانبية للأسطوانة القائمة

لذا نطبق قانون المساحة الجانبية للأسطوانة القائمة وهي :

المساحة الجانبية $=2\times$ النسبة الثابتة $\times$ نصف قطر القاعدة $\times$ الارتفاع $\Longleftarrow (LA=2\pi rh)$

حل :

$r=x-8$ نصف قطر القاعدة , $h=x+12$ الارتفاع

$LA=2\pi rh$

$LA=2\pi(x-8)(x+12)=2\pi(x^2+12x-8x-96)$

$LA=2\pi(x^2+4x-96)=2\pi x^2+8\pi x-192\pi$

تحقق : استعمل تحليل المقادير الجبرية للتحقق من صحة الحل :

$2\pi x^2+8\pi x-192\pi=2\pi(x^2+4x-96)$ اخراج عامل مشترك

$=2\pi(x-8)(x+12)$ تحليل المقدار الجبري بالتجربة

أي أن : $r=x-8$, $h=x+12$ اذا فإن الحل صحيح .

مسائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (الخطوات الأربع)

سؤال : **مدينة الألعاب :** بعض الألعاب في مدينة الألعاب تشغل مساحة أكبر من المساحة التي تشغلها وهي متوقفة . فلعبة الأرجوحة تشغل مساحة دائرية قطرها x متر عند الدوران وعند توقفها فأن قطر المساحة التي تشغلها يقل بمقدار 8 أمتار . اكتب مقدار الفرق بين مساحتي التوقف والدوران للأرجوحة ثم حلله .

الحل :

$2r = x$ قطر عند الدوران $\Rightarrow$ $r = \frac{x}{2}$ نصف القطر عند الدوران

$2r = x - 8$ القطر عند التوقف $\Rightarrow$ $r = \frac{x-8}{2}$ نصف القطر عند التوقف

$A = r^2\pi$ مساحة الدائرة

$$A_1 - A_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{x-8}{2}\right)^2\pi = \frac{x^2\pi}{4} - \frac{(x-8)^2\pi}{4} = \frac{x^2\pi - (x^2 - 16x + 64)\pi}{4}$$
$$= \frac{x^2\pi - x^2\pi + 16\pi x - 64\pi}{4} = \frac{16\pi x - 64\pi}{4} = 4\pi x - 16\pi$$

سؤال : **دب الباندا :** موطن دب الباندا الطبيعي هو سلسلة جبال وسط الصين ويحتاج الباندا الى منطقة واسعة في حديقة الحيوانات حتى يتكيف للعيش . وسعت المنطقة المخصصة للباندا في أحدى حدائق الحيوان بمقدار 6 أمتار الى كل من طول وعرض المنطقة فأصبح طول المنطقة $x + 8$ أمتار والعرض $x + 4$ مترا . ما مساحة المنطقة المخصصة للباندا قبل التوسعة ؟

الحل :

العرض قبل التوسعة $x + 4 - 6 = x - 2$, الطول قبل التوسعة $x + 8 - 6 = x + 2$

المساحة المخصصة = الطول × العرض

$A = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

سؤال : **كرة الثلج :** كرة الثلج هي كرة شفافة تصنع من الزجاج تنطوي على منظر طبيعي وتحتوي على الماء ويستفاد من الماء بوصفه وسطا لسقوط الثلج . اذا كان نصف قطر كرة الثلج $y - 3$ سنتمتر . فما حجم الكرة ؟

الحل :

نصف قطر $r = y - 3$, حجم الكرة $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

$$V = \frac{4}{3}\pi(y-3)^3 = \frac{4}{3}\pi(y-3)(y-3)^2$$
$$= \frac{4}{3}\pi(y-3)(y^2 - 6y + 9) = \frac{4}{3}\pi(y^3 - 6y^2 + 9y - 3y^2 + 18y - 27)$$
$$= \frac{4}{3}\pi(y^3 - 9y^2 + 27y - 27) = \frac{4}{3}\pi y^3 - \frac{4}{3}\pi \times 9y^2 + \frac{4}{3}\pi \times 27y - \frac{4}{3}\pi \times 27$$

$$= \frac{4}{3}\pi y^3 - 12\pi y^2 + 36\pi y - 36\pi$$

سؤال : هندسة : صندوق مكعب الشكل طول ضلعه x سنتمتر وضع داخله مكعب أصغر منه طول ضلعه 3 سنتمتر . حلل المقدار الجبري الذي يمثل الفرق بين حجمي المكعبين .

الحل :

$$V = L^3 \implies V_1 + V_2 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

اختبار الفصل

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1 $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

2 $(v-\sqrt{2})(v+\sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2 = v^2 - 2$

3 $(2-x)(5-x) = 10 - 2x - 5x + x^2$
$= 10 - 7x + x^2$

4 $(2y-3)(y+9) = 3y^2 + 27y - 3y - 27$
$= 3y^2 + 24y - 27$

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

5 $(x+11)(x^2 - 11x + 121) = x^3 + 11^3 = x^3 - 1331$

6 $\left(\frac{1}{3} - y\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}y + y^2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - y^3 = \frac{1}{27} - y^3$

7 $(y-1)^3 = (y-1)(y-1)^2 = (y-1)(y^2 - 2y + 1)$
$= y^3 - 2y^2 + y - y^2 + 2y - 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

8 $\left(Z + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(Z + \frac{1}{4}\right)\left(Z + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(Z + \frac{1}{4}\right)\left(Z^2 + \frac{1}{2}Z + \frac{1}{16}\right)$

$$= Z^3 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{16}Z + \frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{8}Z + \frac{1}{64} = Z^3 + \frac{3}{4}Z^2 + \frac{3}{16}Z + \frac{1}{64}$$

سؤال : حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

9 $8x^2 - 12x = 4x(2x-3)$

التحقق :

$4x(2x-3) = 8x^2 - 12x$

10 $7y^3 + 14y^2 - 21y = 7y(y^2 + 2y - 3)$

التحقق :

$7y(y^2 + 2y - 3) = 7y^3 + 14y^2 - 21y$

11 $\sqrt{18}\,Z^3r + \sqrt{2}\,(Zr^2 - Zr)$
$= 3\sqrt{2}\,Z^3r + \sqrt{2}\,Zr^2 - \sqrt{2}\,Zr$
$= \sqrt{2}\,Zr(3Z^2 + r - 1)$

التحقق :

$\sqrt{2}\,Zr(3Z^2 + r - 1) = 3\sqrt{2}\,Z^3r + \sqrt{2}\,Zr^2 - \sqrt{2}\,Zr$
$= \sqrt{18}\,Z^3r + \sqrt{2}\,(Zr^2 - Zr)$

سؤال : حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

12 $\frac{2}{3}(y+5) + \frac{1}{3}y(y+5) = (y+5)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}y\right)$

13 $\sqrt{5}\,Z(Z^2-1) - \sqrt{2}\,Z^2(Z^2-1) = (Z^2-1)(\sqrt{5}\,Z - \sqrt{2}\,Z^2)$

سؤال : حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع :

14 $6x^4 - 18x^3 + 10x - 30 = (6x^4 - 18x^3) + (10x - 30)$
$= 6x^3(x - 3) + 10(x - 3) = (x - 3)(6x^3 + 10)$

15 $56 - 8y + 14y^2 - 2y^3 = (56 - 8y) + (14y^2 - 2y^3)$
$= 8(7 - y) + 2y^2(7 - y) = (7 - y)(8 + 2y^2)$

سؤال : حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس :

16 $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x = (9x^3 - 6x^2) + (8 - 12x) = 3x^2(3x - 2) + 4(2 - 3x)$
$= 3x^2(3x - 2) + 4(-1)(3x - 2) = 3x^2(3x - 2) - 4(3x - 2)$
$= (3x - 2)(3x^2 - 4)$

17 $\sqrt{11}\,Z^3 - \sqrt{44}\,Z^2 + 5(2 - Z) = \left(\sqrt{11}\,Z^3 - 2\sqrt{11}\,Z^2\right) + 5(2 - Z)$

$= \sqrt{11}\,Z^2(Z - 1) + 5(-1)(Z - 2) = \sqrt{11}\,Z^2(Z - 1) - 5(Z - 2)$
$= (Z - 2)\left(\sqrt{11}Z^2 - 5\right)$

سؤال : حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

18 $16 - x^2 = (4 + x)(4 - x)$

19 $\frac{1}{3}Z^2 - \frac{1}{27} = \frac{1}{3}\left(Z^2 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(Z + \frac{1}{3}\right)\left(Z - \frac{1}{3}\right)$

20 $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4 = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{8} - v^3\right) = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2} - v\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}v + v^2\right)$

21 $8x^3 - \frac{1}{125} = \left(2x - \frac{1}{5}\right)\left(4x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right)$

22 $81 - 18y + y^2 = (9 - y)^2$

23 $7Z^2 - 36Z + 5 = (7Z - 1)(Z - 5)$

سؤال : حدد أي من المقادير الجبرية التالية تمثل مربعا كاملا وحلله :

24 $25x^2 + 30x + 9$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(25x^2)(9)}$
$= 30x$ مربع كامل
$25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$

25 $49 - 4y + y^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(y^2)(49)} = 2(y)(7)$
$= 14y \neq 4y$ ليس مربع كامل

26 $4v^2 + 4\sqrt{5}\,v + 5$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2(2v)(\sqrt{5})$

$= 4\sqrt{5}\,v$ مربع كامل

$4v^2 + 4\sqrt{5}\,v + 5 = (2v + \sqrt{5})^2$

سؤال : اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

27 $x^2 + \cdots\cdots + 81$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(x^2)(81)} = 2(x)(9) = 18x$

$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2$

28 $36 - 12y + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$12y = 2\sqrt{(ay^2)(36)}$ بتربيع الطرفين

$144y^2 = 4(ay^2)(36) \Rightarrow 144y^2 = 144(ay^2)$

$ay^2 = \frac{144y^2}{144} = y^2 \Rightarrow 36 - 12y + y^2 = (6 - y)^2$

29 $7 - \cdots\cdots + 4Z^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bZ = 2\sqrt{(4Z^2)(7)} = 2(2Z)(\sqrt{7}) = 4\sqrt{7}\,Z$

$7 - 4\sqrt{7}\,Z + 4Z^2 = (\sqrt{7} - 2Z)^2$

سؤال : حلل كل مقدار من المقاديـر الآتية :

30 $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

31 $x^2 - 5\sqrt{3}x + 12 = (x - 4\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

32 $2v^2 + 9v + 7 = (2v + 7)(v + 1)$

33 $32 - 16x + 2x^2 = 2(16 - 8x + x^2)$

$= 2(4 - x)(4 - x)$

34 $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3 = \frac{1}{4}(y^2 - 8y + 12)$

$= \frac{1}{4}(y - 2)(y - 6)$

35 $12 - 7\sqrt{2}v + 2v^2$

$= (3\sqrt{2} - v)(4\sqrt{2} - 2v)$

36 $8 + 27x^3 = 2^3 + 3^3x^3$

$= (2 + 3x)(4 - 6x + 9x^2)$

37 $125y^3 - 1 = 5^3y^3 - 1^3$

$= (5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

38 $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27} = \frac{1^3}{v^3} - \frac{2^3}{3^3}$

$= \left(\frac{1}{v} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{v^2} + \frac{2}{3v} + \frac{4}{9}\right)$

39 $1 + 0.125y^3 = 1^3 + (0.5)^3y^3$

$= (1 + 0.5y)(1 - 0.5y + 0.25y^2)$

40 $Z^3 - 0.027 = Z^3 - (0.3)^3$

$= (Z - 0.3)(Z^2 + 0.3Z + 0.09)$

41 $3 - \frac{1}{9}v^3 = \frac{1}{9}(27 - v^3) = \frac{1}{9}(3^3 - v^3)$

$= \frac{1}{9}(3 - v)(9 + 3v + v^2)$

سؤال : اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة

42 $\frac{27-8Z^3}{4Z^2-9} \div \frac{9+6Z+4Z^2}{9+6Z} = \frac{27-8Z^3}{4Z^2-9} \times \frac{9+6Z}{9+6Z+4Z^2}$

$= \frac{(3-2Z)(9+6Z+4Z^2)}{(2Z+3)(2Z-3)} \times \frac{3(3+2Z)}{9+6Z+4Z^2} = \frac{-3(2Z-3)}{(2Z-3)} = -3$

43 $\frac{7}{x^2-25} - \frac{6}{x^2+10x+25} = \frac{7}{(x+5)(x-5)} - \frac{6}{(x+5)^2} = \frac{7(x+5)-6(x-5)}{(x-5)(x+5)^2}$

$= \frac{7x+35-6x+30}{(x-5)(x+5)^2} = \frac{x+65}{(x-5)(x+5)^2}$

44 $\frac{y^2-1}{1-y^3} + \frac{1+y}{1+2y+y^2} = \frac{(y+1)(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)} + \frac{1+y}{(1+y)(1+y)}$

$= \frac{(y+1)(y-1)}{-(y-1)(1+y+y^2)} + \frac{1}{1+y} = \frac{-(y+1)}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+y}$

$= \frac{-(y+1)(1+y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)} = \frac{-(y+y^2+1+y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}$

$= \frac{-2y-y^2-1+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)} = \frac{-y}{(1+y+y^2)(1+y)}$

45 $\frac{Z+3}{Z+5} - \frac{Z-5}{Z-3} + \frac{1}{Z^2+2Z-15} = \frac{Z+3}{Z+5} - \frac{Z-5}{Z-3} + \frac{1}{(Z+5)(Z-3)}$

$= \frac{(Z+3)(Z-3)-(Z-5)(Z+5)+1}{(Z+5)(Z-3)} = \frac{Z^2-9-(Z^2-25)+1}{(Z+5)(Z-3)}$

$= \frac{Z^2-9-Z^2+25+1}{(Z+5)(Z-5)} = \frac{17}{(Z+5)(Z-3)}$

الفصل الثالث : المعادلات

الدرس [1 – 3] : حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

[3 – 1 – 1]	حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيا

ليكن $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$, $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين x , y لحل هذا النظام بيانيا نتبع ما يأتي :

[1] تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي .

[2] لإيجاد احداثي نقطة تقاطع المستقيمين يرسم عمودان من النقطة على المحور الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل .

سؤال : جد مجموعة حل النظام بيانيا في R

$$x - y = 1 \quad ----(1)$$
$$x + y = 2 \quad ----(2)$$

الحل :

رمز للمعادلة (1) : $x - y = 1$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	–1	(0, –1)
1	0	(1, 0)

$0 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow y = -1$

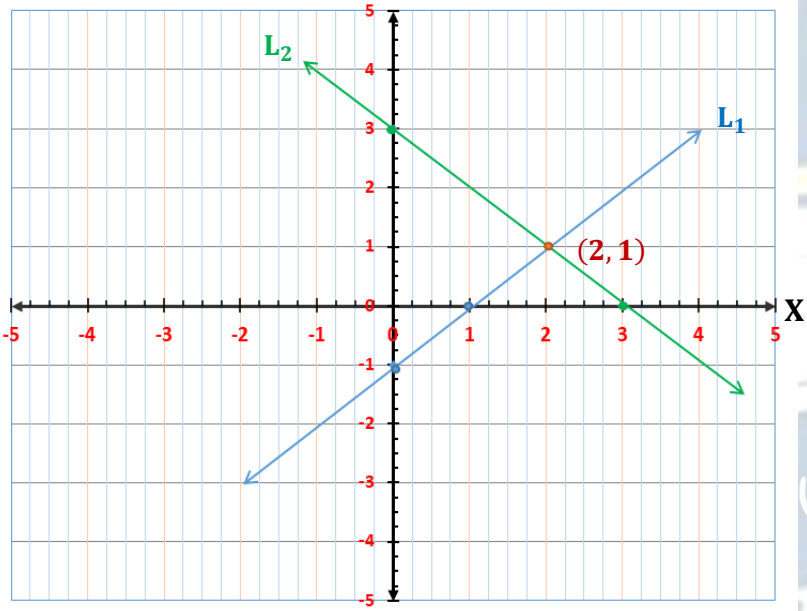
$x - 0 = 1 \Rightarrow x = 1$

رمز للمعادلة (2) : $x + y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$



مجموعة الحل هي : $S = [(2, 1)]$

[3 − 1 − 2]	حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين بتحويل أحدى المعادلتين الى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بايجاد علاقة بين X, Y من أحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى

سؤال : جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال التعويض :

$$y = 4x \quad ---- (1)$$
$$y = x + 6 \quad ---- (2)$$

الحل : نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$4x = x + 6 \quad \Rightarrow \quad 4x - x = 6$$
$$x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

$$y = 2 + 6 = 8$$

مجموعة حل النظام : $S = \{(2, 8)\}$

سؤال : جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال التعويض :

$$x + 8y = 10 \quad ---- (1)$$
$$x - 4y = 2 \quad ---- (2)$$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$$x = 2 + 4y \quad ---- (3)$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$$2 + 4y + 8y = 10 \quad \Rightarrow \quad 12y = 10 - 2$$
$$12y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

نعوض عن قيمة $y = \frac{2}{3}$ في معادلة (3)

$$x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{6+8}{3} = \frac{14}{3}$$

مجموعة حل النظام : $S = \left\{\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

[3 – 1 – 2]	حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

تتلخص هذه الطريقة لحل النظام من معادلتين بحذف أحد المتغيرين وذلك بجعل معامل أحدهما متساويا بالقيمة ومختلفا بالإشارة في كلا المعادلتين .

سؤال : جد مجموعة حل للنظام في R باستعمال الحذف .

1/2022

$x + 2y = 5 \quad ---(1)$
$3x - y = 1 \quad ---(2) \quad \} \times 2$

الحل : نضرب معادلة (2) في العدد 2

$x + 2y = 5 \quad ---(1)$
$6x - 2y = 2 \quad ---(2)$ بالجمع
$7x = 7 \implies x = \frac{7}{7} = 1$

نعوض قيمة $x = 1$ في معادلة (1)

$1 + 2y = 5 \implies 2y = 5 - 1 \implies 2y = 4 \implies y = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة حل النظام : $S = \{(1, 2)\}$

سؤال : جد مجموعة حل للنظام في R باستعمال الحذف :

$3x + 4y = 10 \quad ---(1) \quad \} \times 3$
$2x + 3y = 7 \quad ---(2) \quad \} \times 4$

الحل : نضرب معادلة (1) في العدد 3 ونضرب معادلة (2) في العدد 4

$9x + 12y = 30 \quad ---(1)$
$\mp 8x \mp 12y = \mp 28 \quad ---(2) \implies$ بالطرح
$x = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

$2(2) + 3y = 7 \implies 4 + 3y = 7 \implies 3y = 7 - 4 \implies 3y = 3 \implies y = \frac{3}{3} = 1$

مجموعة حل النظام : $S = \{(2, 1)\}$

تأكد من فهمك

سؤال : جد مجموعة حل للنظام في R بيانياً :

1 $3x - y = 6 \quad ---(1)$
$x - y = 3 \quad ---(2)$

الحل : نرمز للمعادلة (1) : $3x - y = 3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	-6	$(0, -6)$
2	0	$(2, 0)$

$3(0) - y = 6 \Rightarrow -y = 6 \Rightarrow y = -6$

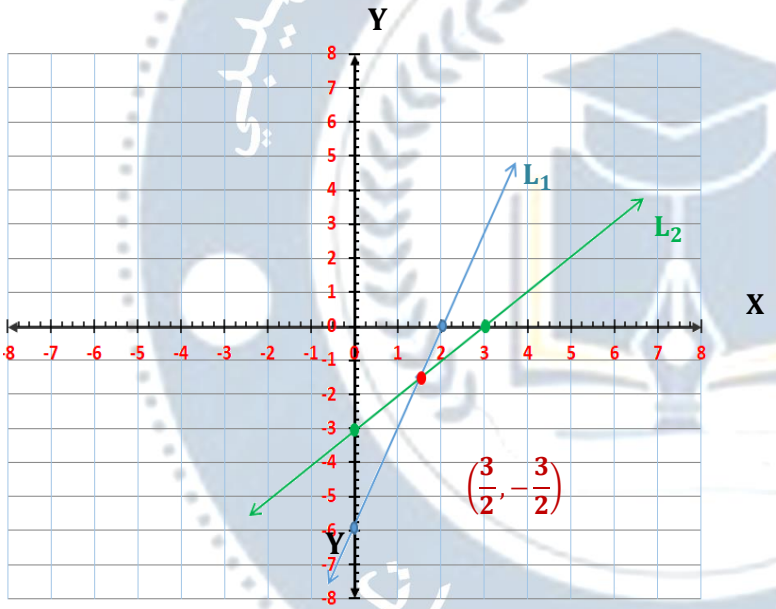
$3x - 0 = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

نرمز للمعادلة (2) $x - y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	-3	$(0, -3)$
3	0	$(3, 0)$

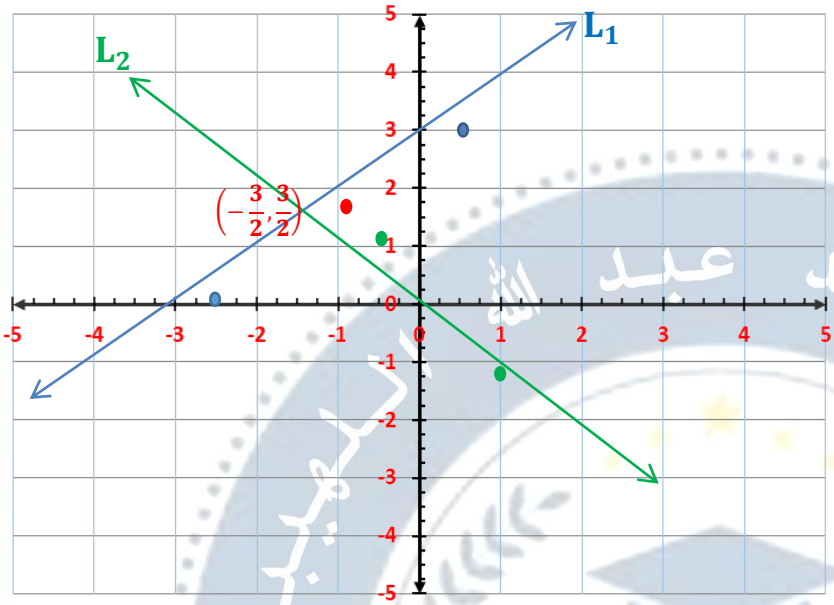
$0 - y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$



مجموعة حل النظام : $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

2 $y - x = 3$ ——— (1)
$y + x = 0$ ——— (2)



الحل: نرمز للمعادلة (1): $y - x = 3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
−3	0	(−3, 0)

$y - 0 = 3 \Rightarrow y = 3$
$0 - x = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

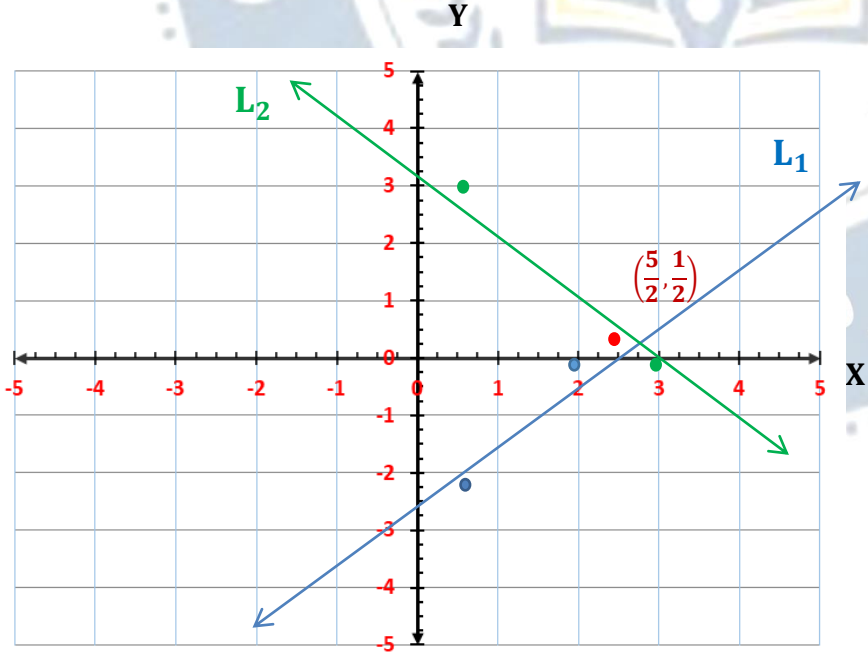
نرمز للمعادلة ( ): $y + x = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
−1	1	(−1, 1)

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$
$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$

3 $y = x - 2$ ——— (1)
$y = 3 - x$ ——— (2)



الحل: نرمز للمعادلة (1): $y = x - 2$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
2	0	(2, 0)

$y = 0 - 2 \Rightarrow y = -2$
$0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$

نرمز للمعادلة (2) $y = 3 - x$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$
$0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$

سؤال : جد مجموعة حل للمعادلتين في R باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي :

1 $2x + 3y = 1$ ———— (1)
$3x - 2y = 0$ ———— (2)

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y$ ———— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2\left(\frac{2}{3}y\right) + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}y + 3y = 1 \quad \} \times 3$

$4y + 9y = 3 \quad \Rightarrow \quad 13y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{13}$

نعوض قيمة $y = \frac{3}{13}$ في معادلة (3)

$x = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{1}{13}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

2 $x - 2y = 11$ ———— (1)
$2x - 3y = 18$ ———— (2)

الحل : من معادلة (1) نحصل على :

$x = 11 + 2y$ ———— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$2(11 + 2y) - 3y = 18 \quad \Rightarrow \quad 22 + 4y - 3y = 18$
$y = 18 - 22 = -4$

نعوض قيمة $y = -4$ في معادلة (3)

$x = 11 + 2(-4) = 11 - 8 = 3$

مجموعة حل النظام : $\{(3, -4)\}$

3 $y - 5x = 10$ ———— (1)
$y - 3x = 8$ ———— (2)

الحل : من معادلة (1) نحصل على :

$y = 10 + 5x$ ———— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$10 + 5x - 3x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8 - 10$
$2x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{2} = -1$

نعوض قيمة $x = -1$ في معادلة (3)

$y = 10 + 5(-1) = 10 - 5 = 5$

مجموعة حل النظام : $\{(-1, 5)\}$

سؤال : جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

1 $3x - 4y = 12$ ———— (1)
$5x + 2y == -6$ ———— (2) } × 2

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 2

$3x - 4y = 12$ ———— (1)
$10x + 4y = -12$ ———— (2) بالجمع
$13x = 0 \Rightarrow x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$5(0) + 2y = -6 \Rightarrow 2y = -6$
$y = \frac{-6}{2} = -3$

مجموعة حل النظام : $\{(0, -3)\}$

2 $x - 3y = 6$ ———— (1) } × 2
$2x - 4y = 24$ ———— (2)

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 2

$\mp 2x \pm 6y = \mp 12$ ———— (1)
$2x - 4y = 24$ ———— (2) بالطرح
$2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{2} = 6$

نعوض قيمة $y = 6$ في معادلة (1)

$x - 3(6) = 6 \Rightarrow x - 18 = 6$
$x = 6 + 18 = 24$

مجموعة حل النظام : $\{(24, 6)\}$

3 $3y - 2x - 7 = 0$ ———— (1)
$y + 3x + 5 = 0$ ———— (2) } × 3

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 3

$3y - 2x - 7 = 0$ ———— (1)
$\mp 3y \mp 9x \mp 15 = 0$ ———— (2) بالطرح
$-11x - 22 = 0 \Rightarrow 11x = -22$
$x = \frac{-22}{11} = -2$

نعوض قيمة $x = -2$ في معادلة (2)

$y + 3(-2) + 5 = 0 \Rightarrow y - 6 + 5 = 0$
$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

مجموعة حل النظام : $\{(-2, 1)\}$

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R وتحقق من صحة الحل :

[1] $\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ ———— (1) } × 6
$\frac{3y}{3} - \frac{x}{3} = 4$ ———— (2) } × 3

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$$4x - 3y = 6 \quad ---(1)$$
$$3y - x = 12 \quad \Rightarrow \quad -x + 3y = 12 \quad ---(2)$$
$$4x - 3y = 6 \quad ---(1)$$
$$-x + 3y = 12 \quad ---(1) \quad \text{بالجمع}$$
$$3x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18}{3} = 6$$

نعوض قيمة $x = 6$ في معادلة (2)

$$-6 + 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad 3y = 12 + 6$$
$$3y = 18 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{18}{3} = 6$$

مجموعة حل النظام : $\{(6, 6)\}$

تحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = 6 , y = 6$ في أحدى المعادلتين لتكن

معادلة (2)

$$-x + 3y = -6 + 3(6) = -6 + 18 = 12$$

$$[2] \quad 0.2x - 6y = 4 \quad ---(1)$$
$$0.1x - 7y == -2 \quad ---(2) \quad \} \times 2$$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 2

$$0.2x - 6y = 4 \quad ---(1)$$
$$\mp 0.2x \pm 14y = \pm 4 \quad ---(2) \quad \text{بالطرح}$$
$$8y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{8} = 1$$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$$0.2x - 6(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 0.2x - 6 = 4$$
$$0.2x = 4 + 6 \Rightarrow \quad 0.2x = 10$$
$$x = \frac{10}{0.2} = \frac{100}{2} = 50$$

مجموعة حل النظام : $\{(50, 1)\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم $x = 50 , y = 1$ في

معادلة (1)

$$0.2x - 6y = 0.2(50) - 6(1) = 10 - 6 = 4$$

$$[12] \quad \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4} \quad ---(1) \quad \} \times 12$$
$$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4} \quad ---(2) \quad \} \times 12$$

الحل : نبسط معادلة (1)

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{11}{4} \quad \} \times 12$$
$$6x + 8y = 33 \quad ---(1)$$

نبسط معادلة (2)

$$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=\frac{25}{4} \quad \}\times 12$$
$$3x-8y=75 \quad ----(2)$$
$$6x+8y=33 \quad ----(1) \quad \text{بالجمع}$$
$$9x=108 \implies x=\frac{108}{9}=12$$

نعوض قيمة $x=12$ في معادلة (1)

$$6(12)+8y=33 \implies 72+8y=33$$
$$8y=33-72 \implies 8y=-39 \implies y=\frac{-39}{8}$$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(12,-\frac{39}{8}\right)\right\}$

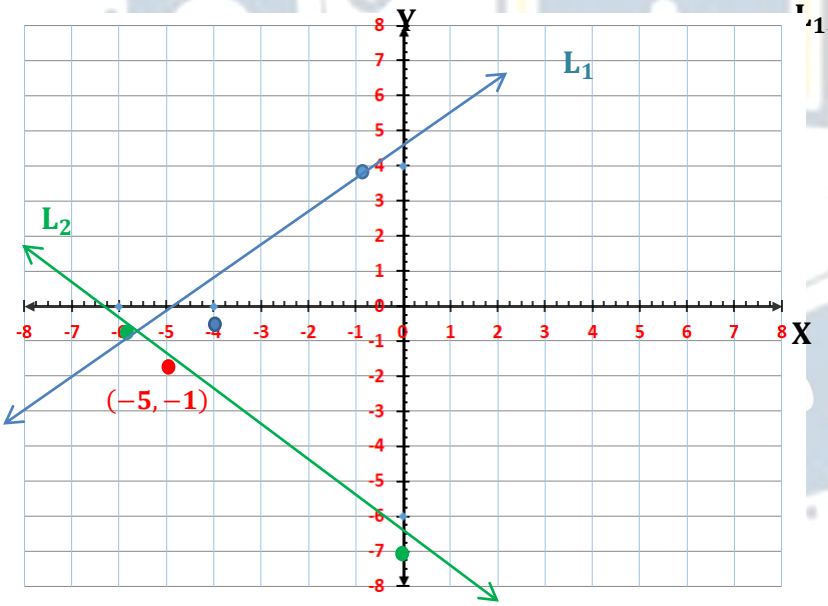
تحقق من صحة الحل: نعوض قيم $x=12\ ,\ y=-\frac{39}{8}$ في معادلة (1)

$$6x+8y=6(12)+8\left(-\frac{39}{8}\right)=72-39=33$$

تدرب وحل التمرينات

سؤال: جد مجموعة الحل للمعادلتين بيانيا في R :

$$[1]\ x-y=-4 \quad ----(1)$$
$$y+x=-6 \quad ----(2)$$



الحل: نرمز للمعادلة (1) $x-y=-4$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
−4	0	(−4, 0)

$$0-y=-4 \implies y=4$$
$$x-0=-4 \implies x=-4$$

نرمز للمعادلة (2) $y+x=-6$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
−6	0	(−6, 0)

$$y+0=-6 \implies y=-6$$
$$0+x=-6 \implies x=-6$$

مجموعة الحل: $\{(-5,-1)\}$

[2] $y = x - 4$ ـــــ (1)
$x = 2 - y$ ـــــ (2)

الحل: نرمز للمعادلة (1) : $y = x - 4$ بالرمز L_1

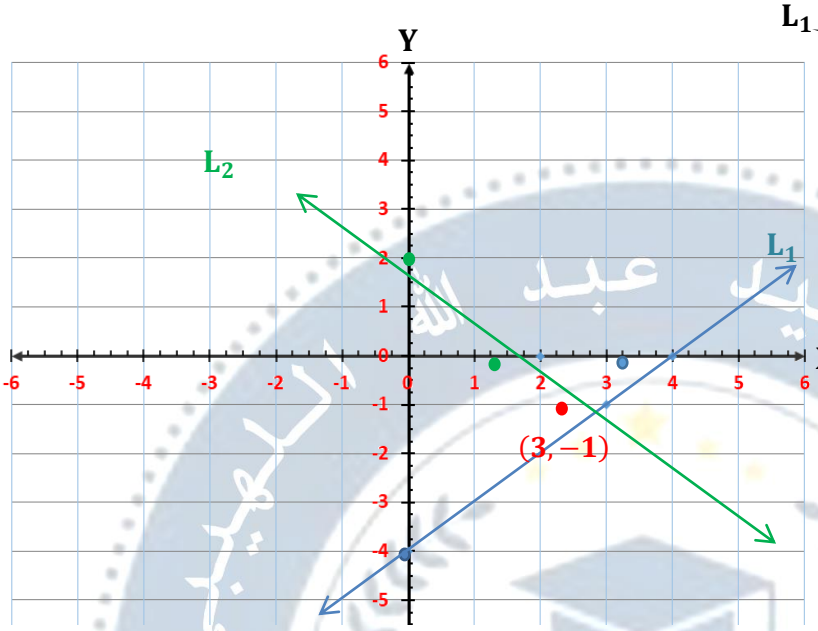
x	y	(x, y)
0	−4	(0, −4)
4	0	(4, 0)

$y = 0 - 4 \Rightarrow y = -4$
$0 = x - 4 \Rightarrow x = 4$

نرمز للمعادلة ( ) : $x = 2 - y$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

$0 = 2 - y \Rightarrow y = 2$
$x = 2 - 0 = 2$



مجموعة حل النظام: $\{(3, -1)\}$

سؤال: جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

1 $3x + 2y = 2$ ـــــ (1)
$x - y = 8$ ـــــ (2)

الحل: من معادلة (2) نحصل على:

$x = 8 + y$ ـــــ (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3(8 + y) + 2y = 2 \Rightarrow 24 + 3y + 2y = 2$

$5y = 2 - 24 \Rightarrow 5y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{5}$

نعوض قيمة $y = -\frac{22}{5}$ في معادلة (3)

$x = 8 - \frac{22}{5} = \frac{40 - 22}{5} = \frac{18}{5}$

مجموعة حل النظام: $\left\{\left(\frac{18}{5}, -\frac{22}{5}\right)\right\}$

2 $2x - y = -4$ ـــــ (1)
$3x - y == 3$ ـــــ (2)

الحل: من معادلة (2) نحصل على:

$y = 3x - 3$ ـــــ (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2x - (3x - 3) = -4 \Rightarrow 2x - 3x + 3 = -4$

$-x = -4 - 3 \Rightarrow -x = -7 \Rightarrow x = 7$

نعوض قيمة $x = 7$ في معادلة (3)

$y = 3(7) - 3 = 21 - 3 = 18$

مجموعة حل النظام $\{(7, 18)\}$

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

1 $3x = 22 - 4y$ ——— (1)
$4y = 3x - 14$ ——— (2)

الحل : نرتب المعادلتين :

$3x + 4y = 22$ ——— (1)
$-3x + 4y = -14$ ——— (2) بالجمع

$8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{8} = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$3x = 22 - 4(1) \Rightarrow 3x = 22 - 4$

$3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

مجموعة حل النظام : $\{(6, 1)\}$

2 $5x - 3y = 6$ ——— (1) $\} \times 5$
$2x + 5y = -10$ ——— (2) $\} \times 3$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 5 ومعادلة (2) في العدد 3

$25x - 15y = 30$ ——— (1)
$6x + 15y = -30$ ——— (1) بالجمع

$31x = 0 \Rightarrow x =$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$2(0) + 5y = -10 \Rightarrow 5y = -10$

$y = \frac{-10}{5} = -2$

مجموعة حل النظام : $\{(0, -2)\}$

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R وتحقق من صحة الحل :

1 $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2$ ——— (1) $\} \times 3$
$2x + 3y = 6$ ——— (2)

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 3

$x - y = 6 \} \times 3$
$3x - 3y = 18$ ——— (1)
$2x + 3y = 6$ ——— (2) بالجمع

$5x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{5}$

نعوض قيمة $x = \frac{24}{5}$ في معادلة (2)

$2\left(\frac{24}{5}\right) + 3y = 6 \Rightarrow \frac{48}{5} + 3y = 6 \} \times 5$

$48 + 15y = 30 \Rightarrow 15y = 30 - 48$

$15y = -18 \Rightarrow y = -\frac{18}{15} = -\frac{6}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{24}{5}, -\frac{6}{5}\right)\right\}$

لتحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = \frac{24}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$ في معادلة (2)

$2x + 3y = 2\left(\frac{24}{5}\right) + 3\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{48}{5} - \frac{18}{5} = \frac{30}{5}$
$= 6$

2 $0.2x - 3y = 2$ ——— (1)
$0.1x - 6y = -3$ ——— (2) $\} \times 2$

الحل : بضرب معادلة (2) في 2

$0.2x - 3y = 2$ ——— (1)
$\mp 0.2x \pm 12y = \pm 6$ ——— (2) بالطرح

$9y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{9} = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$0.2x - 3(1) = 2 \Rightarrow 0.2x - 3 = 2$

$0.2x = 2 + 3 \Rightarrow 0.2x = 5$

$x = \frac{5}{0.2} = \frac{50}{2} = 25$

مجموعة حل النظام : $\{(25, 1)\}$

التحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = 25$, $y = 1$ في معادلة (1)

$0.2x - 3y = 0.2(25) - 3(1) = 5 - 3 = 2$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **طقس :** تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد أيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية . اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف ثم جد حلهما بطريقة الحذف .

الحل : عدد أيام شهر كانون الثاني $= 31$ يوم

نفرض عدد الأيام التي تنخفض بها درجة الحرارة $= x$

نفرض عدد الأيام التي تزداد بها درجة الحرارة $= y$

$$y + x = 31 \quad \text{-------(1)}$$

$$y - x = 9 \quad \text{-------(2)} \qquad \text{بالجمع}$$

$$2y = 40 \implies y = \frac{40}{2} = 20$$

نعوض قيمة $y = 20$ في معادلة (1)

$$20 + x = 31 \implies x = 31 - 20 = 11 \implies S = \{(11, 20)\}$$

سؤال : **تجارة :** باع متجر 25 ثلاجة وغسالة بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة اذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازا باع من كل نوع . اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلها بطريقة التعويض

الحل : نفرض عدد الثلاجات $= x$, عدد الغسالات $= y$

$$x + y = 25 \quad \text{-------(1)}$$

سعر الثلاجة $= 1000000x$, سعر الغسالة $= 500000y$

$$1000000x + 500000y = 20000000 \quad \} \div 500000$$

$$2x + y = 40 \quad \text{-------(2)}$$

من معادلة (1) نحصل على :

$$y = 25 - x \quad \text{-------(3)}$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$$2x + 25 - x = 40 \implies x = 40 - 25 \implies x = 15$$

نعوض قيمة $x = 15$ في معادلة (3)

$$y = 25 - 15 = 10 \implies S = \{(15, 10)\}$$

سؤال : **حفلة تخرج :** عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور . وكان عدد المدعوين 23 شخصا . فكم شخصا دعل كل منهما ؟

الحل : نفرض عدد الأشخاص الذين دعاهم سجاد $= x$

عدد الأشخاص الذين دعاهم أنور $= y$

$x + y = 23$ ———(1)

$x - y = 3$ ———(2) بالجمع

$2x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{2} = 13$ عدد الاشخاص الذين دعاهم سجاد

نعوض قيم $x = 1$ في معادلة (1)

$13 + y = 23 \Rightarrow y = 23 - 13 = 10$ الذين دعاهم أنور

فكر

سؤال : تحد : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R

ii) $\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1$ ———(1) $\}\times 6$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3$ ———(2) $\}\times 2$

الحل : نبسط المعادلتين ذلك بضرب معادلة (1) في العدد 6 والمعادلة (2) في العدد 2

$2x - 2y = 6$ ———(1)

$x + y = 6$ ———(2) $\}\times 2$

$2x + 2y = 12$ ———(2)

$2x - 2y = 6$ ———(1) بالجمع

$4x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

نعوض قيمة $x = \frac{9}{2}$ في معادلة (2)

$\frac{9}{2} + y = 6 \Rightarrow y = 6 - \frac{9}{2} = \frac{12-9}{2} = \frac{3}{2}$

مجموعة حل النظام : $\{(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})\}$

سؤال : أصحح الخطأ : قال أحمد أن مجموعة حل المعادلتين الخطيتين : $2x + 3y = 6 , 3x + 2y = 1$ هي المجموعة : $\{(\frac{5}{16}, \frac{5}{9})\}$ اكتشف خطأ أحمد وصححه .

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 2 والمعادلة (2) في العدد 3

$4x + 6y = 12$ ———(1)

$\mp 9x \mp 6y = \mp 3$ ———(2) بالطرح

$-5x = 9 \Rightarrow x = -\frac{9}{5}$

نعوض قيمة $x = -\frac{9}{5}$ في معادلة (2)

$3(-\frac{9}{5}) + 2y = 1 \Rightarrow -\frac{27}{5} + 2y = 1 \}\times 5$

$-27 + 10y = 5 \Rightarrow 10y = 5 + 27 \Rightarrow 10y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$

مجموعة حل النظام : $\{(-\frac{9}{5}, \frac{16}{5})\}$

خطأ أحمد هو أيجاد مجموعة الحل .

سؤال : أكتب // مجموعة حل المعادلتين الخطيتين :

$5x - 6y = 0 \quad ---- (1)$

$x + 2y = 4 \quad ---- (2) \quad \} \times 3$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 3

$5x - 6y = 0 \quad ---- (1)$

$3x + 6y = 12 \quad ---- (2)$ بالجمع

$8x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

نعوض قيمة $x = \frac{3}{2}$ في معادلة (2)

$\frac{3}{2} + 2y = 4 \quad \} \times 2 \quad \Rightarrow \quad 3 + 4y = 8 \quad \Rightarrow \quad 4y = 8 - 3$

$4y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow$ مجموعة الحل : $\{(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})\}$

مراجعة الفصل

سؤال : جد مجموعة الحل انظام في R باستعمال الحذف لكل مما يأتي : $x + 3y = 7 \ , \ x - 3y = 1$

الحل :

$x + 3y = 7 \quad ---- (1)$

$x - 3y = 1 \quad ---- (2)$ بالجمع

$2x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{2} = 4$

نعوض قيمة $x = 4$ في معادلة (1)

$4 + 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad 3y = 7 - 4$

$3y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{3} = 1$

مجموعة حل النظام : $\{(4, 1)\}$

سؤال : جد مجموعة الحل انظام في R باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$x + y = 2 \quad ---- (1)$

$x + 5y = 4 \quad ---- (2)$

الحل :

$x + y = 2 \quad ---- (1)$

$\mp x \mp 5y = \mp 4 \quad ---- (2)$ بالطرح

$-4y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

نعوض قيمة $y = \frac{1}{2}$ في معادلة (1)

$x+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow x=2-\frac{1}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$

$S=\{(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\}$

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة حل المعادلتين بيانيا في R

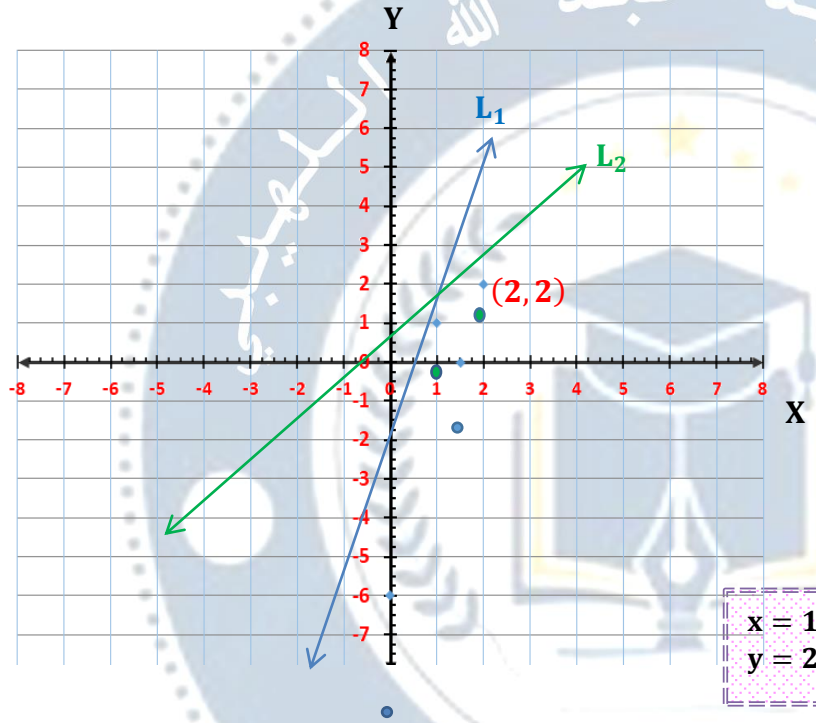
[1] $y=4x-6$, $y=x$ } a) $\{(-2,-2)\}$ b) $\{(-2,2)\}$ c) $\{(2,-2)\}$ d) $\{(2,2)\}$

الحل : نرمز للمعادلة (1) $y=4x-6$ بالرمز L_1

x	y	(x,y)
0	−6	(0,−6)
$\frac{3}{2}$	0	$(\frac{3}{2},0)$

$y=0-6 \Rightarrow y=-6$

$0=4x-6 \Rightarrow 4x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$



نرمز للمعادلة (2) $y=x$ بالرمز L_2

$x=1 \Rightarrow y=1$

$y=2 \Rightarrow x=2$

x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)

مجموعة حل النظام : $\{(2,2)\}$ الجواب فرع (d)

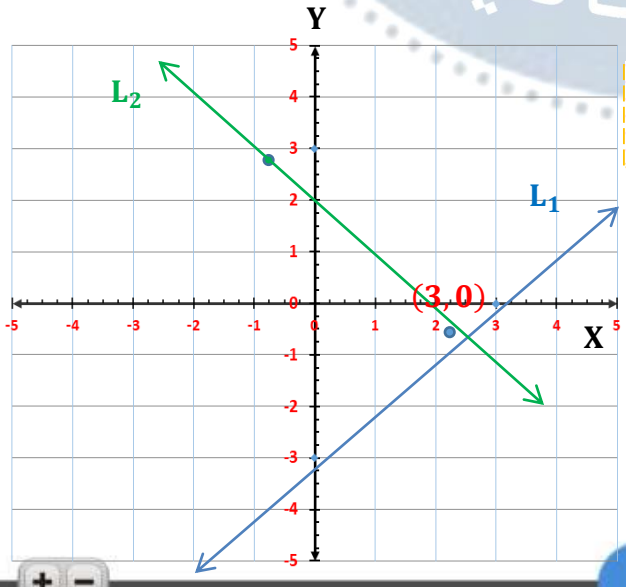
[2] $y=x-3$, $y=3-x$ } a) $\{(-3,0)\}$ b) $\{(3,0)\}$ c) $\{(0,-3)\}$ d) $\{(0,3)\}$

الحل : نرمز للمعادلة (1) $y=x-3$ بالرمز L_1

$y=0-3 \Rightarrow y=-3$

$0=x-3 \Rightarrow x=3$

x	y	(x,y)
0	−3	(0,−3)
3	0	(3,0)



نرمز للمعادلة (1) $y=3-x$ بالرمز L_2

$y=3-0 \Rightarrow y=3$

$0=3-x \Rightarrow x=3$

x	y	(x,y)
0	3	(0,3)
3	0	(3,0)

مجموعة حل النظام : $\{(3,0)\}$ الجواب فرع (b)

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال التعويض لكل مما يأتي :

[3] $3x + 4y = 26$ ——— (1)

$5x - 2y = 0$ ——— (2)

a) $\{(2,5)\}$ b) $\{(-2,-5)\}$

c) $\{(2,-5)\}$ d) $\{(-2,5)\}$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$5x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{5}y$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3\left(\frac{2}{5}y\right) + 4y = 26 \Rightarrow \frac{6}{5}y + 4y = 26 \quad \} \times 5$

$6y + 20y = 130 \Rightarrow 26y = 130$

$y = \frac{130}{26} = 5$

نعوض قيمة $y = 5$ في معادلة (3)

$x = \frac{2}{5} \times 5 = 2$

مجموعة حل النظام : $\{(2,5)\}$

الجواب فرع (a)

[4] $y = 6x + 12$ ——— (1)

$3y = 2x - 8$ ——— (2)

a) $\left\{\left(-\frac{11}{4},\frac{9}{2}\right)\right\}$ b) $\left\{\left(\frac{11}{4},-\frac{9}{2}\right)\right\}$

c) $\left\{\left(-\frac{11}{4},-\frac{9}{2}\right)\right\}$ d) $\left\{\left(\frac{11}{4},\frac{9}{2}\right)\right\}$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 4

$7x - 4y = 12$ ——— (1)

$\mp 12x \pm 4y = \mp 20$ ——— (2) بالطرح

$-5x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$

نعوض قيمة $x = \frac{8}{5}$ في معادلة (2)

$3\left(\frac{8}{5}\right) - y = 5 \Rightarrow \frac{24}{5} - y = 5$

$y = \frac{24}{5} - 5 = \frac{24-25}{5} = -\frac{1}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4$ ——— (1)

$y - \frac{x}{4} = 2$ ——— (2)

a) $\{(8,-4)\}$ b) $\{(-8,-4)\}$

c) $\{(8,4)\}$ d) $\{(-8,4)\}$

الحل : نبسط المعادلتين بضرب معادلة (1) في العدد 4

والمعادلة (2) في العدد 4

$\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \quad \} \times 4 \Rightarrow 3x - 2y = 16$ ——— (1)

$y - \frac{x}{4} = 2 \quad \} \times 4 \Rightarrow 4y - x = 8$ ——— (2)

من معادلة (1) نحصل على :

$x = 4y - 8$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3(4y - 8) - 2y = 16 \Rightarrow 12y - 24 - 2y = 16$

$10y = 16 + 24 \Rightarrow 10y = 40 \Rightarrow y = 4$

نعوض قيمة $y = 4$ في معادلة (3)

	$x = 4(4) - 8 = 16 - 8 = 8$ مجموعة حل النظام: $\{(8,4)\}$ الجواب فرع (c)

سؤال: جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

[6] $7x - 4y = 12$ ——————(1)
$3x - y = 5$ ——————(2)

a) $\{(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ b) $\{(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$
c) $\{(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ d) $\{(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$

نضرب معادلة ( ) في 2

$8x - 2y = 28$ ——————(1)
$\mp x \pm 2y = \mp 14$ ——————(2) بالطرح

$7x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في ( )

$4(2) - y = 14 \Rightarrow 8 - y = 14$
$y = 8 - 14 = -6$

مجموعة حل النظام: $\{(2,-6)\}$

الجواب فرع (c)

[7] $6y - 2x - 8 = 0$ ——————(1)
$y + x - 12 = 0$ ——————(2)

a) $\{(8,-4)\}$ b) $\{(8,4)\}$
c) $\{(-8,4)\}$ d) $\{(-8,-4)\}$

الحل: بضرب معادلة (2) في العدد 2

$6y - 2x - 8 = 0$ ——————(1)
$2y + 2x - 24 = 0$ ——————(2) بالجمع

$8y - 32 = 0 \Rightarrow 8y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{8} = 4$

نعوض قيمة $y = 4$ في معادلة (2)

$4 + x - 12 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

مجموعة حل النظام: $\{(8,4)\}$

الجواب فرع (b)

[8] $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 2\frac{1}{3}$ ——————(1)

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 3\frac{1}{2}$ ——————(2)

a) $\{(-2,-6)\}$ b) $\{(-2,6)\}$
c) $\{(2.-6)\}$ d) $\{(2,6)\}$

الحل: نبسط معادلة (1) ومعادلة (2)

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = \frac{7}{3}$ $\}\times 6$
$4x - y = 14$ ——————(1) $\}\times 2$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = \frac{7}{2}$ $\}\times 4$
$x - 2y = 14$ ——————(2)

الدرس [2 – 3] : حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

[3 – 2 – 1]	حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

لحل المعادلة بطريقة التحليل فرق بين مربعين نتبع ما يأتي :

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

[2] نجعل المعادلة بالصورة : $x^2 - a^2 = 0$

[3] نحل المعادلة بطريقة الفرق بين مربعين بالصورة : $(x + a)(x - a) = 0$

[4] نجد قيم x بجعل أما : $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$ أو : $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

[5] نكتب مجموعة الحل : $S = \{-a, a\}$

سؤال : تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق اذ أنها تقع في جنوب العراق . رسم باسل لوحة جدارية للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي . أكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة .

الحل : نفرض طول ضلع اللوحة x

مساحة اللوحة = طول الضلع × نفسه

$x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

أما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ يهمل

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

طول ضلع اللوحة هو : 3m

سؤال : حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل : $16 - y^2 = 0$

الحل :

$(4 + y)(4 - y) = 0$

أما $4 + y = 0 \Rightarrow y = -4$

أو $4 - y = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S = \{4, -4\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة

$y = 4 \Rightarrow 16 - y^2 = 16 - (4)^2 = 16 - 16 =$

$y = -4 \Rightarrow 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0$

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[1] $4x^2 - 25 = 0$

الحل :

$2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ أما

$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ أو

$S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

[2] $3Z^2 - 12 = 0$

الحل :

$3(Z^2 - 4) = 0 \} \div 3$

$Z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (Z + 2)(Z - 2) = 0$

$Z + 2 = 0 \Rightarrow Z = -2$ أما

$Z - 2 = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$ أو

[3] $2y^2 - 6 = 0$

الحل :

$2(y^2 - 3) = 0 \} \div 2$

$y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0$

$y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$ أما

$y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ أو

[4] $x^2 - 5 = 0$

الحل :

$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$

$x + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ أما

$x - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ أو

[5] $(Z + 1)^2 - 36 = 0$

الحل :

$(Z + 1 + 6)(Z + 1 - 6) = 0$

$\Rightarrow (Z + 7)(Z - 5) = 0$

$Z + 7 = 0 \Rightarrow Z = -7$ أما

$Z - 5 = 0 \Rightarrow Z = 5 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$ أو

[3 – 2 – 2] حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي

لحل المعادلات بخاصية الجر التربيعي نتبع ما يأتي

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

[2] نجعل المتغيرات التي تحتوي x^2 في طرف والأعداد في طرف اخر .

[3] نقسم الطرفين على معامل x^2 أي جعل المعدلة بالصورة : $x^2 = a$

[4] نأخذ الجذر التربيعي للطرفين واضعين اشارتي $(\mp)$ أمام العدد . أي أن : $x = \mp\sqrt{a}$

[5] نكتب مجموعة الحل : $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$

سؤال : حل المعادلة التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل : $x^2 = 9$

الحل :

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{3, -3\}$$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = (3)^2 = 9$ الطرف الأيمن

$x = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = (-3)^2 = 9$ الطرف الأيمن

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[1] $y^2 = 36$

الحل :

$$y = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 6 \quad \Rightarrow \quad S = \{6, -6\}$$

[2] $Z^2 = \frac{9}{25}$

الحل :

$$Z = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \quad \Rightarrow \quad Z = \pm\frac{3}{5} \quad \Rightarrow$$

$$S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$$

[3] $x^2 + 81 = 0$

الحل :

$x^2 = -81$ (لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب)

[4] $3y^2 = 7$

الحل :

$$y^2 = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$$

[5] $4x^2 - 5 = 0$

الحل :

$$4x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

اذا ربطت طرفي معادلة صحيحة فأن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة . أي أن :

$y = x \Rightarrow y^2 = x^2$

لحل مثل هذا النوع من المعادلات نتبع ما يأتي :

[1] نجعل الحد الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ في طرف والأعداد في طرف اخر .

[2] نقسم طرفي المعادلة على معامل المتغير الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ أي :

نجعل المعادلة بالصورة : $\sqrt{x} = a$

[3] نقوم بتربيع طرفي المعادلة . أي أن : $(\sqrt{x})^2 = a^2$

[4] نكتب مجموعة الحل .

سؤال : حل المعادلات التالية في R :

[1] $3\sqrt{x} = 18 \quad \} \div 3$

الحل :

$\sqrt{x} = \frac{18}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = 6$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (6)^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$

[2] $\sqrt{y+8} = 3$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{y+8})^2 = (3)^2 \Rightarrow y + 8 = 9$

$y = 9 - 8 = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

[3] $\sqrt{5Z} = 7$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{5Z})^2 = (7)^2 \Rightarrow 5Z = 49$

$Z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \left\{\frac{49}{5}\right\}$

[4] $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1$ بتربيع الطرفين

الحل :

$\left(\sqrt{\frac{x}{13}}\right)^2 = (1)^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1$

$x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$

تأكد من فهمك

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل :

[1] $x^2 - 16 = 0$

الحل :

$(x+4)(x-4) = 0$

أما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

أو $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 4 \Rightarrow x^2 - 16 = (4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$

$x = -4 \Rightarrow x^2 - 16 = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$

[2] $81 - y^2 = 0$

الحل :

$(9+y)(9-y) = 0$

أما $9 + y = 0 \Rightarrow y = -9$

أو $9 - y = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow S = \{-9, 9\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة :

$y = 9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (9)^2 = 81 - 81 = 0$

$y = -9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (-9)^2 = 81 - 81 = 0$

[3] $2Z^2 - 8 = 0$

الحل ::

$2(Z^2 - 4) = 0 \ \} \div 2 \implies Z^2 - 4 = 0 \implies (Z+2)(Z-2) = 0$

أما $Z + 2 = 0 \implies Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \implies Z = 2 \implies S = \{-2, 2\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة :

$Z = 2 \implies 2Z^2 - 8 = 2(2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

$Z = -2 \implies 2Z^2 - 8 = 2(-2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[1] $4x^2 - 9 = 0$

الحل :

$(2x+3)(2x-3) = 0$

أما $2x + 3 = 0 \implies 2x = -3 \implies x = -\frac{3}{2}$

أو $2x - 3 = 0 \implies 2x = 3 \implies x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

[2] $5y^2 - 20 = 0 \ \} \div 5$

الحل :

$y^2 - 4 = 0 \implies (y+2)(y-2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \implies y = -2$

أو $y - 2 = 0 \implies y = 2 \implies S = \{-2, 2\}$

[3] $(y+2)^2 - 49 = 0$

الحل :

$(y + 2 + 7)(y + 2 - 7) = 0$

$(y + 9)(y - 5) = 0$

أما $y + 9 = 0 \implies y = -9$

أو $y - 5 = 0 \implies y = 5 \implies S = \{-9, 5\}$

[4] $(3 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل :

$(3 - Z + 1)(3 - Z - 1) = 0 \implies (4 - Z)(2 - Z) = 0$

أما $4 + Z = 0 \implies Z = -4$

أو $2 - Z = 0 \implies Z = 2 \implies S = \{-4, 2\}$

[5] $x^2 - 3 = 0$

الحل :

$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

أما $x + \sqrt{3} = 0 \implies x = -\sqrt{3}$

$x - \sqrt{3} = 0 \implies x = \sqrt{3} \implies S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

أو

[6] $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الحل :

$\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$

أما $y + \frac{1}{3} = 0 \implies y = -\frac{1}{3}$

أو $y - \frac{1}{3} = 0 \implies y = \frac{1}{3} \implies S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[1] $x^2 = 64$

الحل :

$x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow S = \{8, -8\}$

[2] $Z^2 = 7$

الحل :

$Z = \pm\sqrt{7} \Rightarrow S = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$

[3] $2y^2 = \frac{49}{8}$

الحل :

$y^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$

$y = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow S = \{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$

[4] $6Z^2 - 5 = 0$

الحل :

$6Z^2 = 5 \Rightarrow Z^2 = \frac{5}{6} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$

$Z = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\}$

[5] $4(x^2 - 12) = 13$

الحل :

$4x^2 - 48 = 13 \Rightarrow 4x^2 = 13 + 48 \Rightarrow 4x^2 = 63$

$x^2 = \frac{63}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{63}{4}}$

$x = \pm\frac{3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{3\sqrt{7}}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\}$

[6] $Z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الحل :

$Z^2 = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow Z^2 = \frac{5-4}{6} \Rightarrow Z^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$Z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow Z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R :

[1] $3\sqrt{x} = 15$

الحل :

$\sqrt{x} = \frac{15}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = 5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow S = \{25\}$

[2] $\sqrt{y-5} = 2$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{y-5})^2 = (2)^2 \Rightarrow y - 5 = 4$

$y = 4 + 5 = 9 \Rightarrow S = \{9\}$

[3] $\sqrt{2Z} = 6$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{2Z})^2 = (6)^2 \Rightarrow 2Z = 36$

$Z = \frac{36}{2} = 18 \Rightarrow S = \{18\}$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حل المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

[1] $x^2 = 49$

الحل :

$x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow S = \{7, -7\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 7 \Rightarrow x^2 = (7)^2 = 49$ الطرف الايمن

$x = -7 \Rightarrow x^2 = (-7)^2 = 49$ الطرف الايمن

[2] $5y^2 - 10 = 0$ $\}\div 5$

الحل :

$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2$

$y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة :

$y = \sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5(\sqrt{2})^2 - 10$
$= 10 - 10 = 0$

$y = -\sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5(-\sqrt{2})^2 - 10$
$= 10 - 10 = 0$

[3] $3Z^2 - 27 = 0$ $\}\div 3$

الحل :

$Z^2 - 9 = 0 \Rightarrow (Z+3)(Z-3) = 0$

أما $Z + 3 = 0 \Rightarrow Z = -3$

أو $Z - 3 = 0 \Rightarrow Z = 3 \Rightarrow S = \{3, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة :

$Z = 3 \Rightarrow 3Z^2 - 27 = 3(3)^2 - 27 = 27 - 27 = 0$

$Z = -3 \Rightarrow 3Z^2 - 27 = 3(-3)^2 - 27$
$= 27 - 27 = 0$

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[1] $9x^2 - 36 = 0$

الحل :

$(3x+6)(3x-6) = 0$

أما $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$

أو $3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{3}=2$

$S=\{2,-2\}$

[2] $7y^2-28=0 \quad \}\div 7$

الحل :

$y^2-4=0 \Rightarrow (y+2)(y-2)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow S=\{2,-2\}$

[3] $9(x^2-1)-7=0$

الحل :

$9x^2-9-7=0 \Rightarrow 9x^2-16=0$

$(3x+4)(3x-4)=0$

اما $3x+4=0 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$

او $3x-4=0 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow S=\left\{\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right\}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[25] $(y+5)^2-64=0$

الحل :

$(y+5+8)(y+5-8)=0$

$(y+13)(y-3)=0$

أما $y+13=0 \Rightarrow y=-13$

$y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow S=\{3,-13\}$او

[26] $x^2-2=0$

الحل :

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

أما $x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$

$x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2} \Rightarrow S=$

أو$\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

[27] $y^2-\frac{1}{36}=0$

الحل :

$\left(y+\frac{1}{6}\right)\left(y-\frac{1}{6}\right)=0$

أما $y+\frac{1}{6}=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{6}$

أو $y-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{6} \Rightarrow S=\left\{\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right\}$

[28] $x^2=121$

الحل :

$x=\pm\sqrt{121} \Rightarrow x=\pm 11 \Rightarrow S=\{11,-11\}$

[29] $50-2y^2=0 \quad \}\div 2$

الحل :

$25-y^2=0 \Rightarrow y^2=25 \Rightarrow y=\pm\sqrt{25}$

$y=\pm 5 \Rightarrow S=\{9,-9\}$

[30] $x^2 = \frac{1}{64}$

الحل :

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{8} \Rightarrow S = \{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\}$

[31] $3y^2 = \frac{25}{3}$

الحل :

$y^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow y = \pm\frac{5}{3}$

$S = \{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$

[32] $7(x^2 - 2) = 50$

الحل :

$7x^2 - 14 = 50 \Rightarrow 7x^2 = 50 + 14$

$7x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{7} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{64}{7}}$

$x = \pm\frac{8}{\sqrt{7}} \Rightarrow S = \{\frac{8}{\sqrt{7}}, -\frac{8}{\sqrt{7}}\}$

[33] $\frac{1}{5}y^2 = \frac{1}{3}$

الحل :

$3y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$y = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R

[34] $6\sqrt{x} = 30$ } ÷ 3

الحل :

$\sqrt{x} = \frac{30}{6} \Rightarrow \sqrt{x} = 5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow S = \{25\}$

[35] $\sqrt{y - 9} = 4$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{y - 9})^2 = (4)^2 \Rightarrow y - 9 = 16$

$y = 16 + 9 = 25 \Rightarrow S = \{25\}$

[36] $\sqrt{4Z} = 8$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{4Z})^2 = (8)^2 \Rightarrow 4Z = 64 \Rightarrow Z = \frac{64}{4} = 16$

$S = \{16\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **موكيت سجاد :** قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها $12m$ وعرضها $3m$ قطعت الى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل . ما طول ضلع الغرفة .

الحل : مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 12 \times 3 = 36\ m^2$

نفرض طول ضلع المربع $= x$

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه $\Leftarrow$ $A = x^2$

مساحة المستطيل = مساحة المربع

$x^2 = 36 \implies x = \pm\sqrt{36} \implies x = \pm 6$

طول ضلع الغرفة $6m$

سؤال : **هندسة :** قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها $x\ cm$ قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع $2cm$ وثنيت لتكون صندوقا دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32cm^3$. جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية

الحل : الارتفاع $= 2$ وبعدي القاعدة $= (x-4)$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول × العرض × الارتفاع

$2(x-4)(x-4) = 32 \quad \} \div 2$

$(x-4)^2 = 16 \implies x-4 = \pm\sqrt{16}$

$x-4 = \pm 4$

أما $x-4=4 \implies x = 4+4 = 8\ cm$

طول ضلع قطعة الكارتون

أو $x-4=-4 \implies x = -4+4 = 0$ يهمل

سؤال : **نافورة :** صمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه $3m$ في منتصف حديقة مربعة الشكل فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40m^2$ فما طول ضلع الحديقة ؟

الحل : نفرض طول ضلع الحديقة $= x$

المساحة المتبقية= مساحة الحديقة – مساحة الحوض

$x^2 - 3^2 = 40 \implies x^2 - 9 = 40 \implies x^2 = 40 + 9$

$x^2 = 49 \implies x = \pm\sqrt{49} \implies x = \pm 7$

طول ضلع الحديقة $x = 7\ m$ أو يهمل $x = -7$ أما

فـــــــــــكر

سؤال : تحد : حل المعادلات التالية في R

i) $9(x^2+1)=34$

الحل :

$9x^2+9-34=0 \Rightarrow 9x^2-25$

$(3x+5)(3x-5)=0$

أما $3x+5=0 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$

أو $3x-5=0 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right\}$

ii) $4x^2-3=0$

الحل :

$4x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

سؤال : هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

i) $2y^2=\frac{16}{10}$, $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل

$y^2=\frac{16}{20} \Rightarrow y^2=\frac{4}{5} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$

$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$

$\left\{\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ لا تمثل مجموعة الحل

ii) $3x^2-7=0$, $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}},-\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

الحل :

$3x^2=7 \Rightarrow x^2=\frac{7}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S=\left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$

لا تمثل مجموعة الحل : $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

سؤال : أصحح الخطأ : قال صلاح أن المجموعة $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ اكتشف خطأ صلاح وصححه .

الحل :

$$5x^2 = 4 \implies x^2 = \frac{4}{5} \implies x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \implies S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

سؤال : حس عددي : عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة . ما العدد ؟

الحل : نفرض العدد الصحيح هو x

$$x^2 - 1 = 80 \implies x^2 = 80 + 1$$

$$x^2 = 81 \implies x = \pm\sqrt{81} \implies x = \pm 9$$

$x = -9$ يهمل

$x = 9$ الصحيح

سؤال : أكتب // مجموعة الحل للمعادلة : $(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

الحل :

$$(8 - 3y + 1)(8 - 3y - 1) = 0 \implies (9 - 3y)(7 - 3y) = 0$$

أما $9 - 3y = 0 \implies 3y = 9 \implies y = \frac{9}{3} = 3$

أو $7 - 3y = 0 \implies 3y = 7 \implies y = \frac{7}{3} \implies S = \left\{3, \frac{7}{3}\right\}$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين : $25 - x^2 = 0$

الحل :

$$(5 + x)(5 - x) = 0$$

أما $5 + x = 0 \implies x = -5$

أو $5 - x = 0 \implies x = 5 \implies S = \{-5, 5\}$

مثال 2 // حل المعادلة التالية في R باستعمال خاصية الجذر التربيعي : $y^2 = \frac{16}{25}$

الحل :

$$y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow y = \mp\frac{4}{5}$$

$$S = \left\{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين : $x^2 - 64 = 0$

الحل :

$$(x+8)(x-8) = 0$$

أما $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S = \{-8, 8\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R باستعمال خاصية الجذر التربيعي : $y^2 = 49$

الحل :

$$y^2 = 49 \Rightarrow y = \mp\sqrt{49} \Rightarrow y = \mp 7$$

$$S = \{7, -7\}$$

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلة التالية في R باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين :

[1] $3x^2 - 12x = 0$

a) $S = \{4, -4\}$ b) $S = \{3, -3\}$

c) $S = \{0, 4\}$ d) $S\{0, 3\}$

الحل :

$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0$

أما $3x = 0 \Rightarrow x = 0$

أو $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{0, 4\}$

الجواب فرع (c)

[2] $7Z^2 - 21 = 0$

a) $S = \{7, -7\}$ b) $S = \{3, -3\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ d) $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

الحل :

$7(Z^2 - 3) = 0 \ \} \div 7 \Rightarrow Z^2 - 3 = 0$

$(Z + \sqrt{3})(Z - \sqrt{3}) = 0$

أما $Z + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Z = -\sqrt{3}$

$Z - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Z = \sqrt{3} \Rightarrow S =$

أو$\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

الجواب فرع (d)

[5] $3x^2 - 6 = 0$

a) $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ b) $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

c) $S = \{6, -6\}$ d) $S = \{2, -2\}$

الحل :

$3(x^2 - 2) = 0 \ \} \div 3 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$

$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$

أما $x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$

أو $x - \sqrt{2} = \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

الجواب فرع (b)

سؤال : حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[6] $x^2 = 144$

a) $S = \{7, -7\}$ b) $S = \{14, -14\}$

c) $S = \{12, -12\}$ d) $S = \{12, 12\}$

الحل :

$x = \pm\sqrt{144} \Rightarrow x = \pm 12 \Rightarrow S = \{12, -12\}$

الجواب فرع (c)

[7] $32 - 2y^2 = 0$

a) $S = \{6, 6\}$ b) $S = \{4, -4\}$

c) $S = \{6, -6\}$ d) $S = \{4, 4\}$

الحل :

$2y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = \frac{32}{2} \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \pm\sqrt{16} \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow S = \{4, -4\}$

الجواب فرع (b)

[8] $5Z^2 = 9$

a) $S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل :

$Z^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \Rightarrow Z = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

$S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$

الجواب فرع (c)

[9] $4(y^2 - 1) = 45$

a) $S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right\}$

الحل :

$4y^2 - 4 = 45 \Rightarrow 4y^2 = 45 + 4 \Rightarrow 4y^2 = 49$

$y^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \Rightarrow y = \pm\frac{7}{2}$

$S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع (c)

[10] $\frac{1}{2}Z^2 = \frac{1}{9}$

a) $S = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

[11] $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$

a) $S = \left\{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

c) $S = \{2, -2\}$ d) $S = \{1, -1\}$

الحل :

$x^2 = \frac{3}{16} + \frac{13}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{16}{16} = 1 \Rightarrow x = \mp\sqrt{1}$

$x = \mp 1 \Rightarrow S = \{1, -1\}$

الجواب فرع (d)

الحل :

$9Z^2 = 2 \Rightarrow Z^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$

$Z = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$

الجواب فرع (c)

الدرس [3 – 3] : حل المعادلات التربيعية بالتجربة

[3 – 3 – 1] | حل المعادلة : $x^2 + bx + c = 0$

تحليل المقدار الى قوسين بإشارتين مختلفتين أو متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق (الثالث) والحد الوسط (الثاني)

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $x^2 - 7x + 12 = 0$

الحل :

$(x - 4)(x - 3) = 0$

أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{4, 3\}$

[2] $y^2 + 8y + 15 = 0$

الحل :

$(y + 5)(y + 3) = 0$

أما $y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$

$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S =$ أو $\{-5, -3\}$

[3] $Z^2 - Z - 30 = 0$

الحل :

$(Z - 6)(Z + 5) = 0$

أما $Z - 6 = 0 \Rightarrow Z = 6$

$Z + 5 = 0 \Rightarrow Z = -5 \Rightarrow S =$ أو $\{6, -5\}$

[4] $x^2 - 2x - 63 = 0$

الحل :

$(x - 9)(x + 7) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow S =$ أو $\{9, -7\}$

سؤال : اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار $2m$ على ضعف عرضه ومساحته $480m^2$. فما بعدي الملعب ؟

الحل :

نفرض عرض الملعب x , طول الملعب $2x+2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$$x(2x+2)=480$$
$$2x^2+2x-480=0 \quad \} \div 2$$
$$x^2+x-240=0 \implies (x+16)(x-15)=0$$

أما $x+16=0 \implies x=-16$ يهمل

أو $x-15=0 \implies x=5m$ عرض الملعب

$2x+2=2(15)+2=30+2=32m$ طول الملعب

سؤال : ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12 ؟

الحل :

نفرض العدد x , مربع العدد x^2

$$x^2-x=12 \implies x^2-x-12=0$$
$$(x-4)(x+3)=0$$

أما $x-4=0 \implies x=4$

أو $x+3=0 \implies x=-3$

$ax^2+bx+c=0$: حل المعادلة	$[3-3-2]$

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $4y^2-14y+6=0$

الحل :

$$(4y-2)(y-3)=0$$

أما $4y-2=0 \implies 4y=2 \implies y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

أو $y-3=0 \implies y=3 \implies S=\left\{3,\frac{1}{3}\right\}$

[2] $3x^2+18x-21=0$

الحل :

$$(x+7)(3x-3)=0$$

أما $x+7=0 \implies x=-7$

$3x-3=0 \implies 3x=3 \implies x=\frac{3}{3}=1$

أو

$S=\{1,-7\}$

[3] $20+13Z+2Z^2=0$

الحل :

$$(4+Z)(5+2Z)=0$$

أما $4+Z=0 \implies Z=-4$

أو $5+2Z=0 \implies 2Z=-5 \implies Z=-\frac{5}{2}$

$S=\left\{-4,-\frac{5}{2}\right\}$

[4] $9x^2-69x-24=0 \quad \} \div 3$

الحل :

$3x^2-23x-8=0 \implies (x-8)(3x+1)=0$

أما $x-8=0 \implies x=8$

أو $3x+1=0 \implies 3x=-1 \implies x=-\frac{1}{3}$

$S=\left\{8,-\frac{1}{3}\right\}$

سؤال : مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 1m فاذا كانت مساحة المسبح $140m^2$ جد أبعاده ؟

الحل : نفرض عرض المسبح x

طول المسبح $3x-1$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$x(3x-1)=140 \Rightarrow 3x^2-x-140=0$

$(x-7)(3x+20)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7m$ عرض المسبح

أو $3x+20=0 \Rightarrow 3x=-20 \Rightarrow x=-\frac{20}{3}$ يهمل

$3x-1=3(7)-1=21-1=20m$ طول المسبح

تأكد من فهمك

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $x^2-9x+18=0$

الحل :

$(x-6)(x-3)=0$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow S=\{6,3\}$

[2] $x^2-4x-32=0$

الحل :

$(x-8)(x+4)=0$

أما $x-8=0 \Rightarrow x=8$

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow S=\{8,-4\}$

[3] $y^2+48y-49=0$

الحل :

$(y+49)(y-1)=0$

أما $y+49=0 \Rightarrow y=-49$

أو $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\{1,-49\}$

[4] $x^2-9x-36=0$

الحل :

$(x-12)(x+3)=0$

أما $x-12=0 \Rightarrow x=12$

أو $x+3=0 \quad x=-3 \Rightarrow S=\{12,-3\}$

[5] $x^2-3x+2=0$

الحل :

$(x-2)(x-1)=0$

أما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{1,2\}$

[6] $y^2-8y-33=0$

الحل :

$(y-11)(y+3)=0$

أما $y-11=0 \Rightarrow y=11$

أو $y+3=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow S=\{11,3\}$

سؤال : ما العدد الذي لو أضيف 4 أضعافه الى مربعه لكان الناتج 45

الحل : نفرض العدد هو x , مربع العدد $= x^2$

أربعة اضعاف العدد $= 4x$

$x^2 + 4x = 45 \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 0$

$(x+9)(x-5) = 0$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5, -9\}$

سؤال : ما العد الذي مربعه يزيد عن ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل : نفرض العدد هو x , مربع العدد $= x^2$

ضعف العدد $= 2x$

$x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x-7)(x+5) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow S = \{7, -5\}$

[14] $70 - 33y - 4y^2 = 0$

الحل :

$(7 - 4y)(10 + y) = 0$

أما $7 - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{4}$

أو $10 + y = 0 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow S = \left\{-10, \frac{7}{4}\right\}$

سؤال : سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها $48m^2$. ما أبعاد السجادة ؟

الحل : نفرض عرض السجادة x , طول السجادة $x + 2$

مساحة السجادة = الطول × العرض

$x(x+2) = 48 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x+8)(x-6) = 0$

أما $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ يهمل

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ عرض السجادة

$x + 2 = 6 + 2 = 8m$ طول السجادة

سؤال : حل المعادلات التالية في R :

[1] $15x^2 - 11x - 14 = 0$

الحل :

$(5x - 7)(3x + 2) = 0$

أما $5x - 7 = 0 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

أو $3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$S = \left\{\frac{7}{5}, -\frac{2}{3}\right\}$

[2] $6 + 7x - 5x^2 = 0$

الحل :

$(3 + 5x)(2 - x) = 0$

أما $3 + 5x = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2, -\frac{3}{5}\}$

[3] $42 + 64y + 24y^2 = 0 \quad \} \div 2$

الحل :

$21 + 32y + 12y^2 = 0$

$(3 + 2y)(7 + 6y) = 0$

أما $3 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

أو $7 + 6y = 0 \Rightarrow 6y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{6}$

$S = \{-\frac{7}{6}, -\frac{3}{2}\}$

[4] $36 - 75x + 6x^2 = 0 \quad \} \div 3$

الحل :

$12 - 25x + 2x^2 = 0 \Rightarrow (12 - x)(1 - 2x) = 0$

أما $12 - x = 0 \Rightarrow x = 12$

أو $1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$S = \{12, \frac{1}{2}\}$

سؤال : أرض مس بمقدار 4m على عرضها ما بعدا الأرض اذا كانت مساحتها $60m^2$ ؟

الحل : نفرض العرض x الطول $x + 4$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x + 4) = 60 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$

$(x + 10)(x - 6) = 0$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ يهمل

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ العرض

$x + 4 = 6 + 4 = 10m$ الطول

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[16] $x^2 - 15x + 56 = 0$

الحل :

$(x-8)(x-7) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow S = \{8, 7\}$

[17] $y^2 + 16y + 63 = 0$

الحل :

$(y+9)(y+7) = 0$

أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$

$y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow S =$ أو$\{-9, -7\}$

[18] $x^2 + 15x - 16 = 0$

الحل :

$(x+16)(x-1) = 0$

أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1, -16\}$

[19] $y^2 - y - 42 = 0$

الحل :

$(y-7)(y+6) = 0$

أما $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$

أو $y + 6 = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow S = \{7, -6\}$

[20] $x^2 - 4x + 3 = 0$

الحل :

$(x-3)(x-1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$

[21] $y^2 - 6y - 55 = 0$

الحل :

$(y-11)(y+5) = 0$

أما $y - 11 = 0 \Rightarrow y = 11$

$y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow S =$ أو$\{11, -5\}$

[23] $12x^2 - 20x + 7 = 0$

الحل :

$(2x-1)(6x-7) = 0$

أما $2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

أو $6x - 7 = 0 \Rightarrow 6x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{6}$

$S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right\}$

[24] $28 + 2Z - 8Z^2 = 0$

الحل :

$(7+4Z)(4-2Z) = 0$

$7 + 4Z = 0 \Rightarrow 4Z = -7 \Rightarrow Z =$ أما$-\frac{7}{4}$

أو $4 - 2Z = 0 \Rightarrow 2Z = 4 \quad Z = \frac{4}{2} = 2$

$S = \left\{2, -\frac{7}{4}\right\}$

[25] $81 - 9x - 12x^2 = 0$

الحل :

$(9-4x)(9+3x) = 0$

أما $9 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

$9 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{3} =$ أو-3

[26] $50Z^2 + 10Z - 4 = 0 \quad \} \div 2$

الحل :

$25Z^2 + 5Z - 2 = 0 \Rightarrow (5Z+2)(5Z-1) = 0$

أما $5Z + 2 = 0 \Rightarrow 5Z = -2 \Rightarrow Z = -\frac{2}{5}$

أو $5Z - 1 = 0 \Rightarrow 5Z = 1 \Rightarrow Z = \frac{1}{5}$

$S=\left\{\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right\}$	$S=\left\{-3,\frac{9}{4}\right\}$

سؤال : قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار $2m$ عن طولها . ما بعدا القطعة المعدنية اذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟

الحل : نفرض طول القطعة x , عرض القطعة $x-2$

مساحة القطعة = الطول × العرض

$$x(x-2)=24 \Rightarrow x^2-2x-24=0$$
$$(x-6)(x+4)=0$$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ طول القطعة

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ يهمل

$x-2=6-2=4m$ عرض القطعة

سؤال : ما العدد الذي مربعه ينقص عن ثلاثة أمثاله بمقدار 2 ؟

الحل : نفرض العدد x , مربع العدد x^2 , ثلاثة أمثاله $3x$

$$3x-x^2=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$$
$$(x-2)(x-1)=0$$

أما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{2,1\}$

سؤال : صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار $3m$ ومساحتها $54m^2$. ما أبعاد الصالة ؟

الحل : نفرض عرض الصالة x , مثلي عرضها $2x$

طول الصالة $2x-3$

مساحة الصالة = الطول × العرض

$$x(2x-3)=54 \Rightarrow 2x^2-3x-54=0$$
$$(x-6)(2x+9)=0$$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ عرض الصالة

أو $2x+9=0 \Rightarrow 2x=-9 \Rightarrow x=-\frac{9}{2}$ يهمل

$2x-3=2(6)-3=12-3=9m$ طول الصالة

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلات التالية في R وتحقق من صحة

[29] $y^2-9y-36=0$	[28] $x^2-4x+3=0$
الحل :	**الحل :**
$(y-12)(y+3)=0$	$(x-3)(x-1)=0$
أما $y-12=0 \Rightarrow y=12$	أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$
أ $y+3=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow S=\{12,-3\}$	أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{3,1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y بالمعادلة :

$y = 12 \Rightarrow y^2 - 9y - 36$
$= (12)^2 - 9(12) - 36$
$= 144 - 108 - 36 = 0$

$y = -3 \Rightarrow y^2 - 9y - 36$
$= (-3)^2 - 9(-3) - 36$
$= 9 + 27 - 36 = 0$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة :

$x = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3$
$= 9 - 12 + 3 = 0$

$x = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3$
$= 1 - 4 + 3 = 0$

[31] $80 - 38y + 3y^2 = 0$

الحل :

$(8 - 3y)(10 - y) = 0$

أما $8 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$

$10 - y = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow S =$

أو $\left\{10, \frac{8}{3}\right\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y بالمعادلة :

$y = 10 \Rightarrow 80 - 38y + 3y^2$
$= 80 - 38(10) + 3(10)^2$
$= 80 - 380 + 300$
$= 0$

$y = \frac{8}{3} \Rightarrow 80 - 38y + 3y^2$
$= 80 - 38\left(\frac{8}{3}\right) + 3\left(\frac{8}{3}\right)^2$
$= 80 - \frac{304}{3} + \frac{64}{3} = \frac{240 - 304 + 64}{3} = \frac{0}{3}$

[30] $4 - 26x + 12x^2 = 0$

الحل :

$(4 - 2x)(1 - 6x) = 0$

أما $4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

أو

$1 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : رياضة : اذا كان طول صورة ملعب كرة القدم بمقدار 4m على ضعف عرضها فما بعدا الصورة اذا كانت مساحتها $160m^2$؟

الحل : نفرض عرض الصورة x , ضعف العرض $2x$ طول الصورة $2x + 4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x + 4) = 160$
$2x^2 + 4x - 160 = 0 \} \div 2$
$x^2 + 2x - 80 = 0$
$(x + 10)(x - 8) = 0$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ يهمل

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8m$ عرض الصورة

$2x + 4 = 2(8) + 4 = 16 + 4 = 20m$ طول الصورة

سؤال : **حقل نعام** : اذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار $4m$ عن ضعف عرضه فاذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ فهل يكفي سياج طوله $44m$ لتحويط الحقل ؟

الحل : نفرض عرض الحقل x , ضعف العرض $2x$ طول الحقل $2x-4$

المساحة = الطول × العرض

$$x(2x-4)=96 \Rightarrow 2x^2-4x-96=0 \ \} \div 2$$
$$x^2-2x-48=0 \Rightarrow (x+6)(x-8)=0$$

أما $x+6=0 \Rightarrow x=-6$ يهمل

أو $x-8=0 \Rightarrow x=8m$ عرض

$2x-4=2(8)-4=16-4=12m$ طول الحقل

محيط المستطيل = $2 \times$ (الطول + العرض)

$P=2\times(12+8)=2\times 20=40m$ نعم يكفي

سؤال : **أطار صورة** : اشترى سامر اطار لصورة طوله ضعف عرضه يحتاج سامر الى تصغير الاطار بمقدار $2cm$ من طوله وعرضه ليصبح مناسبا للصورة فما أبعاد الاطار الذي اشتراه سامر اذا كانت مساحة الصورة $40cm^2$ ؟

الحل : نفرض عرض الاطار x , طول الاطار $2x$

بعد التصغير يصبح : العرض $(x-2)$, الطول $(2x-2)$

المساحة = الطول × العرض

$$(2x-2)(x-2)=40$$
$$2x^2-4x-2x+4-40=0$$
$$2x^2-6x-36=0 \ \} \div 2 \Rightarrow x^2-3x-18=0$$
$$(x-6)(x+3)=0$$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ العرض

أو $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ يهمل

$2x=2(6)=12m$ طول

فـــــــــــكر

سؤال : **تحد :** حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

i) $(x-3)(x+2)=14$

الحل :

$x^2+2x-3x-6-14=0 \Rightarrow x^2-x-20=0$
$(x-5)(x+4)=0$
أما $x-5=0 \Rightarrow x=5$
أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow S=\{5,-4\}$

ii) $3y^2-11y+10=80$

الحل :

$3y^2-11y+10-80=0$
$3y^2-11y-70=0 \Rightarrow (y-7)(3y+10)=0$
أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$
أو $3y+10=0 \Rightarrow 3y=-10 \Rightarrow y=-\frac{10}{3}$

$S=\left\{7,-\frac{10}{3}\right\}$

سؤال : **وضح :** هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

i) $4x^2+2x=30$, $\left\{-\frac{2}{5},3\right\}$

الحل :

$(2x+6)(2x-5)=0$
أما $2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$
أو $2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$
$S=\left\{\frac{5}{2},3\right\}$ لا تمثل مجموعة حل

ii) $42-33y+6y^2=0$, $\left\{2,\frac{7}{2}\right\}$

الحل :

$(7-2y)(6-3y)=0$
أما $7-2y=0 \Rightarrow 2y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{2}$

أو $6-3y=0 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{3}=2$
$S=\left\{2,\frac{7}{2}\right\}$ تمثل مجموعة حل

سؤال : **أصحح الخطأ** : قالت رنا أن مجموعة الحل للمعادلة : $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3, 5\}$. حدد خطأ رنا وصححه .

الحل :

$(2x - 4)(x - 15) = 0$

أما $2x - 4 = 0 \implies 2x = 4 \implies x = \frac{4}{2} = 2$

أو $x - 15 = 0 \implies x = 15 \implies S = \{2, 15\}$

خطأ رنا مجموعة الحل .

سؤال : **حس عددي** : عدد صحيح مكون من رقمين فاذا كان رقم آحاده يزيد على ضعف عشراته بمقدار 1 وحاصل ضرب رقميه يساوي 10 فما العدد ؟

الحل : نفرض العشرات x , ضعف العشرات $2x$

الاحاد $2x + 1$

$x(2x + 1) = 10 \implies 2x^2 + x - 10 = 0$

$(2x + 5)(x - 2) = 0$

أما $2x + 5 = 0 \implies 2x = -5 \implies x = -\frac{5}{2}$

أو $x - 2 = 0 \implies x = 2 \implies S = \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$

سؤال : **أكتب //** معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها : ما العدد الذي ينقص مربعه على ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل : نفرض العدد x , ضعف العدد $2x$, مربع العدد x^2

$x^2 - 2x = 35 \implies x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x - 7)(x + 5) = 0$

أما $x - 7 = 0 \implies x = 7$

أو $x + 5 = 0 \implies x = -5 \implies S = \{7, -5\}$

مراجعة الفصل:

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $x^2 - 2x - 15 = 0$

الحل :

$(x-5)(x+3) = 0$

أما $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{5, -3\}$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $x^2 - 10x + 21 = 0$

الحل :

$(x-7)(x-3) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{7, 3\}$

مثال 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $3y^2 - 11y + 10 = 0$

الحل :

$(3y-5)(y-2) = 0$

أما $3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $4y^2 + 16y - 9 = 0$

الحل :

$(2y+9)(2y-1) = 0$

أما $2y + 9 = 0 \Rightarrow 2y = -9 \Rightarrow y = -\frac{9}{2}$

أو $2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $y^2 + 10y + 21 = 0$

a) $S = \{3, -7\}$ b) $S = \{-3, 7\}$

c) $S = \{-3, -7\}$ d) $S = \{3, 7\}$

الحل :

$(y + 3)(y + 7) = 0$

أما $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$

أو $y + 7 = 0 \quad y = -7 \Rightarrow S = \{-3, -7\}$

الجواب فرع (c)

[2] $x^2 - 5x - 36 = 0$

a) $S = \{7, -8\}$ b) $S = \{-4, 9\}$

c) $S = \{4, -9\}$ d) $S = \{-4, -9\}$

الحل :

$(x - 9)(x + 4) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4, 9\}$

الجواب فرع (b)

[3] $y^2 + y - 56 = 0$

a) $S = \{7, -8\}$ b) $S = \{-7, 8\}$

c) $S = \{7, 8\}$ d) $S = \{-7, -8\}$

الحل :

$(y + 8)(y - 7) = 0$

أما $y + 8 = 0 \Rightarrow y = -8$

أو $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow S = \{7, -8\}$

الجواب فرع (a)

[4] $4y^2 + 18y + 18 = 0$

a) $S = \left\{-3, \frac{3}{4}\right\}$ b) $S = \left\{3, \frac{3}{4}\right\}$

c) $S = \left\{3, \frac{3}{2}\right\}$ d) $S = \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

الحل :

$(2y + 3)(2y + 6) = 0$

أما $2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

أو $2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = -6$

$y = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow S = \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $6Z^2 + 36Z - 42 = 0$

a) $S = \{1, 7\}$ b) $S = \{-1, 7\}$

c) $S = \{-1, -7\}$ d) $S = \{1, -7\}$

الحل :

$6Z^2 + 36Z - 42 = 0 \ \} \div 6 \Rightarrow Z^2 + 6Z - 7 = 0$

$(Z + 7)(Z - 1) = 0$

أما $Z + 7 = 0 \Rightarrow Z = -7$

أو $Z - 1 = 0 \Rightarrow Z = 1 \Rightarrow S = \{1, -7\}$

الجواب فرع (d)

[6] $22 - 20y - 2y^2 = 0$

a) $S = \{11, 1\}$ b) $S = \{1, -11\}$

c) $S = \{11, -1\}$ d) $S = \{-1, -11\}$

الحل :

$22 - 20y - 2y^2 = 0 \ \} \div 2$

$11 - 10y - y^2 = 0$

$(1 - y)(11 + y) = 0$

أما $1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$

$11 + y = 0 \Rightarrow y = -11 \Rightarrow S =$

أو$\{1, -11\}$

الجواب فرع (b)

[10] $32 + 12x - 9x^2 = 0$

a) $= \left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$

الحل :

$(4 + 3x)(8 - 3x) = 0$

أما $4 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

أو $8 - 3x = 0 \Rightarrow 8x = 3 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

$S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$

الجواب فرع (d)

[8] ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a) $S = \{7, 6\}$ b) $S = \{7, -6\}$

c) $S = \{-7, 6\}$ d) $S = \{-7, -6\}$

الحل : نفرض العدد x , مربع العدد x^2

$x^2 - x = 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0$

$(x - 7)(x + 6) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow S = \{7, -6\}$

الجواب فرع (b)

[9] عددان حاصل ضربهما 54 أحدهما يزيد على الآخر بمقدار 3

فما العددان ؟

a) $S = \{6, 9\}$ b) $S = \{6, -9\}$

c) $S = \{-6, 9\}$ d) $S = \{-6, -9\}$

الحل : نفرض العدد الاول x , العدد الثاني $x + 3$

$x(x + 3) = 54 \Rightarrow x^2 + 3x - 54 = 0$

$(x + 9)(x - 6) = 0$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = \{6, -9\}$

الجواب فرع (b)

[10] عددان حاصل ضربهما 48 أحدهما يقل عن الآخر بمقدار 8

فما العددان ؟

a) $S = \{8, 6\}$ b) $S = \{12, -4\}$

c) $S = \{10, 4\}$ d) $S = \{-12, -4\}$

الحل : نفرض العدد الاول x , العدد الثاني $x - 8$

$x(x-8)=48 \implies x^2-8x-48=0$

$(x-12)(x+4)=0$

أما $x-12=0 \implies x=12$

$x+4=0 \implies x=-4 \implies S=\{12,-4\}$

الجواب فرع (b)

الدرس [4 – 3] : حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

[3 – 4 – 1]	حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

تعرفت سابقا كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل والآن سوف نستخدم هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة . أي أن :

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{ax^2}\pm\sqrt{c}\right)^2$$

حيث الإشارة $\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني).

سؤال : الجكوار هو أحد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور تمثل المعادلة : $x^2-20x+100=0$ مساحة المنطقة المربعة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات . ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة ؟

الحل :

$x^2-20x+100=0$

$(x-10)^2=0 \implies x-10=0 \implies x=10$

طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو : $10m$

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $4x^2+20x+25=0$

الحل :

$(2x+5)^2=0 \implies 2x+5=0$

$2x=-5 \implies x=-\frac{5}{2}$

[2] $y^2-y+\frac{1}{4}=0$

الحل :

$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0 \implies y-\frac{1}{2}=0 \implies y=\frac{1}{2}$

[3] $3-6\sqrt{3}Z+9Z^2=0$

الحل :

$\left(\sqrt{3}-3Z\right)^2=0 \implies \sqrt{3}-3Z=0$

$3Z=\sqrt{3} \implies Z=\frac{\sqrt{3}}{3}$

[3 – 4 – 2] حل المعادلات التربيعية بأكمال المربع

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية بالمربع الكامل كالآتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ حيث $a \neq 0$

2) اذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a

3) نضيف الى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x) أي أن : $\left(\frac{1}{2}\,b\right)^2$

4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعا كاملا ونبسط الطرف الأيمن .

5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x

مثال // حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع :

[1] $x^2 - 4x - 12 = 0$

الحل :

$x^2 - 4x = 12$

$\left(\frac{1}{2} \times 4\right)^2 = (2)^4 = 4$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$ بأخذ الجذر التربيعي الطرفين

$x - 2 = \pm 4 \Rightarrow$ أما $x - 2 = 4 \Rightarrow x = 4 + 2 = 6$

أو $x - 2 = -4 \Rightarrow x = -4 + 2 = -2 \Rightarrow S = \{6, -2\}$

[2] $2y^2 - 3 = 3y$

الحل :

$2y^2 - 3y = 3 \;\}\div 2 \Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{24+9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

أما $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}+3}{4}$

أو $y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{33}+3}{4}, \frac{3-\sqrt{33}}{4}\right\}$

تأكد من فهمك

سؤال : مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح اذا كانت مساحته $36cm^2$ ؟

الحل : نفرض عرض المستطيل x , طول المستطيل $x+2$

\مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+2)=36 \Rightarrow x^2+2x=36$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2+2x+1=36+1$

$(x+1)^2=37$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x+1=\pm\sqrt{37} \Rightarrow x+1\approx\pm 6$

أما $x+1\approx 6 \Rightarrow x\approx 6-1\approx 5cm$ عرض المستطيل

أو $x+1\approx -6 \Rightarrow x\approx -6-1=-7$ يهمل

$x+2=5+2=7\ cm$ طول المستطيل

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2+12x+36=0$

الحل :

$(x+6)^2=0 \Rightarrow x+6=0 \Rightarrow x=-6$

[2] $y^2-10y+25=0$

الحل :

$(y-5)^2=0 \Rightarrow y-5=0 \Rightarrow y=5$

[3] $4x^2-4x+1=0$

الحل :

$(2x-1)^2=0 \Rightarrow 2x-1=0$

$2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

[4] $y^2+2\sqrt{7}\,y+7=0$

الحل :

$\left(y+\sqrt{7}\right)^2=0 \Rightarrow y+\sqrt{7}=0$

$\Rightarrow y=-\sqrt{7}$

[5] $x^2+16x=-64$

الحل :

$x^2+16x+64=0 \Rightarrow (x+8)^2=0$

$x+8=0 \Rightarrow x=-8$

[6] $\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x+x^2=0$

الحل :

$\left(\frac{1}{4}-x\right)^2=0 \Rightarrow \frac{1}{4}-x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R بأكمال المربع :

[1] $x^2-10x-24=0$

الحل :

$x^2-10x=24$

$\left(\frac{1}{2}\times 10\right)^2=(5)^2$

$=25$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-10x+25=24+25$

[2] $y^2-3=2y$

الحل :

$y^2-2y=3$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-2y+1=3+1$

$(y-1)^2=4$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-1=\pm 2$

أما $y-1=2 \Rightarrow y=2+1=3$

أو $y-1=-2 \Rightarrow y=-2+1=-1$

$S=\{3,-1\}$

$(x-5)^2=49$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-5=\pm 7$

أما $x-5=7 \Rightarrow x=7+5=12$

أو $x-5=-7 \Rightarrow x=-7+5=-2$

$S=\{12,-5\}$

[3] $4x^2-3x-16=0$

الحل :

$4x^2-3x=16 \ \} \div 4 \Rightarrow x^2-\frac{3}{4}x=4$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-\frac{3}{5}=\pm\frac{\sqrt{14}}{5}$

أما $x-\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{14}}{5} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{14}}{5}+\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{14}+3}{5}$

أو $x-\frac{3}{5}=-\frac{\sqrt{14}}{5} \Rightarrow x=\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{14}}{5}=\frac{3-\sqrt{14}}{5}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{14}+3}{5},\frac{3-\sqrt{14}}{5}\right\}$

[4] $3y^2+2y=1$

الحل :

$3y^2+2y=1 \ \} \div 3 \Rightarrow y^2+\frac{2}{3}y=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$

$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3+1}{9}$

$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}$

أما $y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

أو $y-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

$S=\left\{1,-\frac{1}{3}\right\}$

[5] $x^2-\frac{6}{5}x=\frac{1}{5}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}=\frac{1}{5}+\frac{9}{25} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{5}\right)^2$

$=\frac{5+9}{25}$

$x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}=4+\frac{9}{64}$

$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2=\frac{265}{64}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-\frac{3}{8}=\pm\frac{\sqrt{265}}{8}$

[6] $5y^2+15y-30=0$

الحل :

$5y^2+15y=30 \ \} \div 5 \Rightarrow y^2+3y=6$

$\left(\frac{1}{2}\times 3\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2+3y+\frac{9}{4}=6+\frac{9}{4}$

$\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

أما $y+\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$

أو $y+\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2}$

$=\frac{-\sqrt{33}-3}{2}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{33}-3}{2}, \frac{-\sqrt{33}-3}{2}\right\}$

أما $x-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{265}}{8}+\frac{3}{8}$

$=\frac{\sqrt{265}+3}{8}$

أو $x-\frac{3}{8}=-\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{265}}{8}$

$=\frac{3-\sqrt{26}}{8}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{265}+3}{8}, \frac{3-\sqrt{265}}{8}\right\}$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2+24x+144=0$

الحل :

$(x+12)^2=0 \Rightarrow x+12=0 \Rightarrow x=-12$

[2] $y^2-20y+100=0$

الحل :

$(y-10)^2=0 \Rightarrow y-10=0 \Rightarrow y=10$

[15] $y^2+4\sqrt{2}\,y+8=0$

الحل :

$(y+2\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow y+2\sqrt{2}=0$

$y=-2\sqrt{2}$

[16] $7-2\sqrt{7}Z+Z^2=0$

الحل :

$(\sqrt{7}-Z)^2=0 \Rightarrow \sqrt{7}-Z=0 \Rightarrow Z=\sqrt{7}$

[17] $3y^2+36-12\sqrt{3}\,y=0$

الحل :

$3y^2-12\sqrt{3}\,y+36=0$

$(\sqrt{3}\,y-6)^2=0 \Rightarrow \sqrt{\ }\,y-6=0$

$\sqrt{3}\,y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{\sqrt{3}}$

[18] $9Z^2-10Z+\frac{25}{9}=0$

الحل :

$\left(3Z-\frac{5}{3}\right)^2=0 \Rightarrow 3Z-\frac{5}{3}=0$

$3Z=\frac{5}{3} \Rightarrow Z=\frac{5}{9}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[1] $y^2+2\sqrt{3}\,y=3$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\right)^2=(\sqrt{3})^2$

$=3$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2+2\sqrt{3}\,y+3=3+3$

$(y+\sqrt{3})^2=6$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

[2] $4Z^2-12Z-27=0$

الحل :

$4Z^2-12Z=27 \;\}\div 4 \Rightarrow Z^2-3Z=\frac{27}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times 3\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2-3Z+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}$

$\left(Z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{36}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z-\frac{3}{2}=\pm\frac{6}{2}$

$y+\sqrt{3}=\pm\sqrt{6}$

أما $y+\sqrt{3}=\sqrt{6} \Rightarrow y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$

أو $y+\sqrt{3}=-\sqrt{6} \Rightarrow y=-\sqrt{6}-\sqrt{3}$

$S=\{\sqrt{6}+\sqrt{3}\,,-\sqrt{6}-\sqrt{3}\}$

[3] $x^2-2x=0$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-2x+1=1$

$(x-1)^2=1$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-1=\pm 1$

أما $x-1=1 \Rightarrow x=1+1=2$

أو $x-1=-1 \Rightarrow x=-1+1=0$

$S=\{2,0\}$

[4] $y^2-8y=24$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-8y+16=24+16$

$(y-4)^2=40$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-4=\pm 2\sqrt{10}$

أما $y-4=2\sqrt{10} \Rightarrow y=2\sqrt{10}+4$

أو $y-4=-2\sqrt{10} \Rightarrow y=4-2\sqrt{10}$

$S=\{2\sqrt{10}+4\,,4-2\sqrt{10}\}$

[5] $x^2-\frac{2}{3}x=4$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=4+\frac{1}{9}$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{37}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{37}}{3}$

أما $x-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{37}}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{37}+1}{3}$

أو $x-\frac{1}{3}=\frac{-\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{37}}{3}=\frac{1-\sqrt{37}}{3}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{37}+1}{3}\,,\frac{1-\sqrt{37}}{3}\right\}$

[6] $8y^2+16y-64=0$

الحل :

$8y^2+16y=64 \;\}\div 8 \Rightarrow y^2+2y=8$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2+2y+1=8+1$

$(y+1)^2=9$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y+1=\pm 3$

أما $y+1=3 \Rightarrow y=3-1=2$

أو $y+1=-3 \Rightarrow y=-3-1=-4$

$S=\{2,-4\}$

سؤال : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

[1] $x^2 - 6x = 15$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = 15 + 9$

$(x - 3)^2 = 24$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 3 \approx \pm 5$

أما $x - 3 \approx 5 \implies x = \approx 5 + 3 \approx 8$

أو $x - 3 \approx -5 \implies x \approx -5 + 3 \approx -2$

$S = \{8, -2\}$

[2] $y(2y + 28) = 28$

الحل :

$2y^2 + 28y = 28 \} \div 2 \implies y^2 + 14y = 14$

$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2 = 49$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 14y + 49 = 14 + 49$

$(y + 7)^2 = 63$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + 7 = \pm 8$

أما $y + 7 = 8 \implies y = 8 - 7 = 1$

أو $y + 7 = -8 \implies y = -8 - 7 = -15$

$S = \{1, -15\}$

[3] $Z^2 + 10Z + 10 = 0$

الحل :

$Z^2 + 10Z = -10$

$\left(\frac{1}{2} \times 10\right)^2 = (5)^2 = 25$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + 10Z + 25 = -10 + 25$

$(Z + 5)^2 = 15$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **مدينة بابل :** مدينة بابل هي مدينة عراقية كانت تقع على نهرالفرات وكانت عاصمة البابليين أيم حكم حمورابي سنة $(1792-1750)$ قبل الميلاد . اذا كانت المعادلة $x^2-28x+196=0$ تمثل مساحة أحدى القاعات المربعة الشكل اذ x يمثل طول ضلع القاعة . جد طول ضلع القاعة ؟

الحل :

$x^2-28x+196=0 \quad \Rightarrow \quad (x-14)^2=0$

$x-14=0 \quad \Rightarrow \quad x=14$ طول ضلع القاعة

سؤال : **دب الباندا :** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 مترا وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها . جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح .

الحل : نفرض الطول x , العرض $x-8$

المساحة = الطول × العرض

$x(x-8)=126 \quad \Rightarrow \quad x^2-8x=126$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-8x+16=126+16$

$(x-4)^2=142$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-4\approx \pm 12$

أما $x-4\approx 12 \quad \Rightarrow \quad x\approx 12+4\approx 16$ الطول

أو $x-4\approx -12 \Rightarrow x\approx -12+4\approx -8$ يهمل

$x-8=16-8=8$ العرض

سؤال : **حيتان :** تجنح بعض المجموعات من الحيتان الى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة ويحاول حماة البيئة ارجاعها الى البحر. حل المعادلة $x^2+20x=525$ بطريقة اكمال المربع لايجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحن الى أحد شواطئ استراليا .

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times 20\right)^2=(10)^2=100$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2+20x+100=525+100$

$(x+10)^2=625$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x+10=\pm 25$

أما $x+10=25 \quad \Rightarrow \quad x=25-10=15$

أو $x+10=-25 \Rightarrow x=-25-10=-35$ يهمل

عدد الحيتان هو 15

فـــــــكر

سؤال : **تحد :** حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

i) $4x(x-6)=27$

الحل :

$4x^2-24x=27 \ \} \div 4 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x=\frac{27}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2=(3)^2=9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-6x+9=\frac{27}{4}+9 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2=\frac{27+36}{4}$

$(x-3)^2=\frac{63}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-3\approx \pm\frac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad x-3\approx \pm 2$

أما $x-3\approx 2 \quad \Rightarrow \quad x\approx 2+3\approx 5$

أو $x-3\approx -2 \Rightarrow x\approx -2+3\approx 1 \Rightarrow S=\{5,1\}$

ii) $6y^2-48y=6$

الحل :

$6y^2-48y=6 \ \} \div 6 \quad \Rightarrow \quad y^2-8y=1$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-8y+16=1+16$

$(y-4)^2=17$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-4\approx \pm 4$

أما $x-4\approx 4 \quad \Rightarrow \quad x\approx 4+4\approx 8$

أو $x-4\approx -4 \Rightarrow x\approx -4+4\approx 0 \Rightarrow S=\{8,0\}$

سؤال : **أصحح الخطأ :** حلت سوسن المعادلة: $4x^2-4\sqrt{3}\,x+3=0$ بطريقة اكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الآتي : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$. اكتشف خطأ سوسن وصححه .

الحل :

$4x^2-4\sqrt{3}\,x=-3 \ \} \div 4 \quad \Rightarrow \quad x^2-\sqrt{3}\,x=-\frac{3}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-\sqrt{3}\,x+\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$

$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

سؤال : **حس عددي :** هل أن مجموعة الحل للمعادلة : $y^2 - 4y + 1 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة ؟ وضح اجابتك .

الحل : كلا تحتوي على قيمتين متساويتين ومتشابهتين بالإشارة

$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0$

$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

سؤال : **أكتب //** مجموعة الحل للمعادلة : $\frac{1}{81} - \frac{2}{9}Z + Z^2 = 0$

الحل :

$\left(\frac{1}{9} - Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{9} - Z = 0 \Rightarrow Z = \frac{1}{9}$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R بالمربع الكامل : $9x^2 - 36x + 36 = 0$

الحل :

$(3x-6)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6$

$x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R بالمربع الكامل : $4x^2 - 28x + 49 = 0$

الحل :

$(2x+7)^2 \Rightarrow 2x + 7 = 0 \Rightarrow 2x = -7$

$x = -\frac{7}{2}$

مثال 2 // حل المعادلة بطريقة اكمال المربع : $x^2 - 6x = 27$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

$(x-3)^2 = 36$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 3 = \pm 6$

أما $x - 3 = 6 \Rightarrow x = 6 + 3 = 9$

أو $x - 3 = -6 \Rightarrow x = -6 + 3 = -3$

$S = \{9, -3\}$

تدريب 2 // حل المعادلة بطريقة اكمال المربع : $x^2 - 12x = 28$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 12\right)^2 = (6)^2 = 36$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 12x + 36 = 28 + 36$

$(x-6)^2 = 64$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 6 = \pm 8$

أما $x-6=8 \Rightarrow x=8+6=14$

أو $x-6=-8 \Rightarrow x=-8+6=-2$

$S=\{14,-2\}$

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2+6x+9=0$

a) $x=6$ b) $x=-3$ c) $x=4$ d) $x=3$

الحل :

$(x+3)^2=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

الجواب فرع (b)

[2] $4Z^2-20Z+25=0$

a) $Z=-\frac{5}{2}$ b) $Z=-\frac{2}{5}$ c) $Z=\frac{5}{2}$ d) $Z=\frac{2}{5}$

الحل :

$(2Z-5)^2=0 \Rightarrow 2Z-5=0$

$2Z=5 \Rightarrow Z=\frac{5}{2}$

الجواب فرع (c)

[3] $\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+x^2$

a) $x=\frac{1}{4}$ b) $x=-\frac{1}{4}$ c) $x=\frac{1}{2}$ d) $x=-\frac{1}{2}$

الحل :

$\left(\frac{1}{4}-x\right)^2=0 \Rightarrow \frac{1}{4}-x=0 \quad x=\frac{1}{4}$

الجواب فرع (a)

[4] $y^2-2y+3=0$

a) $y=-3$ b) $y=3$ c) $y=-\sqrt{3}$ d) $y=\sqrt{3}$

الحل :

$(y-\sqrt{3})^2=0 \Rightarrow y-\sqrt{3}=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}$

الجواب فرع (d)

سؤال : حل المعادلات التالية في R باكمال المربع :

[5] $x^2-12x=13$

a) $S=\{13,1\}$ b) $S=\{13,-1\}$

c) $S=\{-13,1\}$ d) $S=\{-13,-1\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times 12\right)^2=(6)^2=36$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-12x+36=13+36$

$(x-6)^2=49$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-6=\pm 7$

أما $x-6=7 \Rightarrow x=7+6=13$

أو $x-6=-7 \Rightarrow x=-7+6=-1$

$S=\{13,-1\}$

الجواب فرع (b)

[6] $4y^2-32y=17$

a) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{17}{2}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{-1}{2},\frac{2}{17}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{17}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{-1}{2},\frac{17}{2}\right\}$

الحل :

$4y^2-32y=17 \ \} \div 4 \Rightarrow y^2-8y=\frac{17}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=66$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-8y+16=\frac{17}{4}+16$

[7] $16Z^2 - 40Z - 11 = 0$

a) $S = \left\{\frac{11}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-11}{4}, \frac{-1}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-11}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

الحل :

$16Z^2 - 40Z = 11 \ \} \div 16 \implies Z^2 - \frac{5}{2}Z = \frac{11}{16}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 - \frac{5}{2}Z + \frac{25}{16} = \frac{11}{16} + \frac{25}{16}$

$\left(Z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z - \frac{5}{4} = \pm\frac{6}{4}$

أما $Z - \frac{5}{4} = \frac{6}{4} \implies Z = \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$

أو $Z - \frac{5}{4} = -\frac{6}{4} \implies Z = \frac{5}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$

الجواب فرع (c)

[8] $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$

a) $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$

$\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{8+1}{36}$

$\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{1}{6} = \pm\frac{3}{6}$

أما $y - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \implies y = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

أو $y - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} \implies y = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

الجواب فرع (c)

[9] $Z^2 + 2\sqrt{5}Z = 4$

a) $S = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$

b) $S = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$

c) $S = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$

d) $S = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5}\right)^2 = (\sqrt{5})^2$

$= 5$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + 2\sqrt{5}Z + 5 = 4 + 5$

$(Z + \sqrt{5})^2 = 9$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z + \sqrt{5} = \pm 3$

أما $Z + \sqrt{5} = 3 \implies Z = 3 - \sqrt{5}$

أو $Z + \sqrt{5} = -3 \implies Z = -3 - \sqrt{5}$

	$S = \{3-\sqrt{5}, -3-\sqrt{5}\}$ الجواب فرع (c)

سؤال : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

[13] $x^2 - 8x = 8$

a) $S \approx \{9, 1\}$ b) $S \approx \{9, -1\}$

c) $S \approx \{-9, 1\}$ d) $S \approx \{-9, -1\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 8x + 16 = 8 + 16$

$(x-4)^2 = 24$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 4 \approx \pm 5$

أما $x - 4 \approx 5 \Rightarrow x \approx 5 + 4 \approx 9$

أو $x - 4 \approx -5 \Rightarrow x \approx -5 + 4 \approx -1$

$S \approx \{9, -1\}$

الجواب فرع (b)

الدرس [3 – 5] : حل المعادلات باستعمال القانون العام

[3 – 5 – 1] حل المعادلات باستعمال القانون العام (الدستور)

يمكن حل المعادلة $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لحل المعادلة بالقانون العام وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية كما يأتي

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) : $ax^2 + bx + c = 0$

2) نكتب قيم المعاملات : a معامل x^2 , b معامل x مع اشارته , c الحد المطلق مع اشارته .

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير .

سؤال : أريد رصف ممر على جانبي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة $7m$ وعرضها $5m$ ومساحة الرصف $45m^2$ جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك ؟

الحل : نفرض عرض الممر $= x$

فإن مساحة الجزء الأيمن من الممر $= 7x$

مساحة الجزء الممر الأمامي $= 5x$ ومساحة زاوية الممر $= {}^{2}$

ومجموع مساحتي الرصف $45m^2$

$$x^2 + 7x + 5x = 45 \implies x^2 + 12x - 45 = 0$$

$$a = 1 , b = 12 , c = -45$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \mp \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-12 \mp \sqrt{144 + 180}}{2} = \frac{-12 \mp \sqrt{324}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \mp 18}{2}$$

أما $x = \frac{-12 + 18}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m$ عرض الممر

أو $x = \frac{-12 - 18}{2} = \frac{-30}{2} = -15$ يهمل

سؤال : جد مجموعة حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 3x - 5 = 0$

الحل :

$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$

أو $x = \frac{3-\sqrt{29}}{2}$

$S = \left\{\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \frac{3-\sqrt{9}}{2}\right\}$

[3 − 5 − 2]	المقدار المميز $[\Delta = b^2 - 4ac]$

يمكن معرفة نوع جذري المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال المميز كالآتي :

1) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب ومربع كامل يكون نوع الجذران حقيقيان نسبيان .

2) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب وليس مربعا كاملا يكون نوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

3) اذا كان المميز يساوي صفر $[b^2 - 4ac = 0]$ يكون نوع الجذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

4) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac < 0]$ سالب يكون نوع الجذران غير حقيقيين (ليس لها حل في R)

مثال // حدد جذري المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

[1] $2x^2 + 3x - 2 = 0$

الحل :

$a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

أما $x = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $x = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \implies S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

[2] $y^2 - 4y - 9 = 0$

الحل :

$a = 1, \ b = -4 \ , \ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 16 + 36 = 52$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{52}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2}$

أما $y = \frac{4+\sqrt{52}}{2}$

أو $y = \frac{4-\sqrt{52}}{2} \implies S = \left\{\frac{4+\sqrt{52}}{2}, \frac{4-\sqrt{52}}{2}\right\}$

[3] $Z^2 + 8Z = -16$

الحل :

$Z^2 + 8Z + 16 = 0 \implies a = 1, \ b = 8 \ , \ c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان (لها جذر حقيقي واحد)

$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4$	

مثال // ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة : $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+1) \quad , \quad c = 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+1)]^2 = -4(1)(4) = 0$

$(k+1)^2 - 16 = 0$

$(k+1)^2 = 16$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 1 = \pm 4$

أما $k + 1 = 4 \implies k = 4 - 1 = 3$

أو $k + 1 = -4 \implies k = -4 - 1 = -5$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 3 \implies x^2 - 4x + 4 = 0 \implies (x-2)^2 = 0$

$x - 2 = 0 \implies x = 2$

$k = -5 \implies x^2 + 4x + 4 = 0 \implies (x+2)^2 = 0$

$x + 2 = 0 \implies x = -2$

تأكد من فهمك

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام في R

[1] $x^2 - 4x - 5 = 0$

الحل :

$a = 1 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = -5$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$

أما $x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

أو $x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \implies S = \{5, -1\}$

[2] $y^2 + 5y - 1 = 0$

الحل :

$a = 1 \quad , \quad b = 5 \quad , \quad c = -1$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$

أما $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ أو $y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$

$S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} , \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right\}$

[3] $3x^2 - 9x = -2$

[4] $4y^2 + 8y = 6$

الحل :

$4y^2 + 8y - 6 = 0\} \div 2 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 3 = 0$

$a = 2\ ,\ b = 4,\ c = -3$

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{40}}{4} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

أما $y = -1 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ أو $y = - - \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$S = \left\{-1 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\ , -1 - \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

الحل :

$3x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow a = 3\ ,\ b = -9\ ,\ c = 2$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$

$x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6} = \dfrac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$

أما $x = \dfrac{9 + \sqrt{57}}{6}$ أو $x = \dfrac{9 - \sqrt{57}}{6}$

$S = \left\{\dfrac{9 + \sqrt{57}}{6}\ , \dfrac{9 - \sqrt{57}}{6}\right\}$

[6] $2y^2 - 3 = -5y$

الحل :

$2y^2 + 5y - 3 = 0 \Rightarrow a = 2\ ,\ b = 5,\ c = -3$

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$

$= \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4}$

أما $y = \dfrac{-5 + 7}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

أو $y = \dfrac{-5 - 7}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \Rightarrow S = \left\{\dfrac{1}{2}, -3\right\}$

[5] $4x^2 - 12x + 9 = 0$

الحل :

$a = 4\ ,\ b = -12\ ,\ c = 9$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$

$= \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \dfrac{12 \pm 0}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

سؤال : حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[2] $3x^2 - 7x + 6 = 0$

الحل :

$a = 3\ ,\ b = -7\ ,\ c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(6) = 49 - 72 = -23$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

[1] $2x^2 + 3x = 5$

الحل :

$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \dfrac{-3 \pm 7}{4}$

أما $x = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$

أو $x = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow S = \{1, -\frac{5}{2}\}$

[9] $y^2 - 2y + 1 = 0$

الحل :

$a = 1, \ b = -2, \ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$

[10] $y^2 + 12 = -9y$

الحل :

$y^2 + 9y + 12 = 0 \Rightarrow a = 1, \ b = 9, \ c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac =$

$\Delta = (9)^2 - 4(1)(12) = 81 - 48 = 33$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2}$

أما $y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}$ أو $y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}$

$S = \{\frac{-9 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}\}$

سؤال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+2)x + 36 = 0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \ , \ b = -(k+2) \ , \ c = 36$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+2)]^2 = -4(1)(36) = 0$

$(k+2)^2 - 144 = 0$

$(k+2)^2 = 144$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 2 = \pm 12$

أما $k + 2 = 12 \Rightarrow k = 12 - 2 = 10$

أو $k + 2 = -12 \Rightarrow k = -12 - 2 = -14$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 12 \Rightarrow x^2 - (k+2)x + 36 = 0$

$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = 0$

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

$k = -14 \Rightarrow x^2 - (k+2)x + 36 = 0$

$x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x+6)^2 = 0$

$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

سؤال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k-5)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$4y^2 - (k-5)y + 25 = 0$

$a = 4 \quad , \quad b = -(k-5) \quad , \quad c = 25$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k-5)]^2 = -4(4)(25) = 0$

$(k-5)^2 - 400 = 0$

$(k-5)^2 = 400$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k - 5 = \pm 20$

أما $k - 5 = 20 \implies k = 20 + 5 = 25$

أو $k - 5 = -20 \implies k = -20 + 5 = -15$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 25 \implies y^2 - (k-5)y + 25 = 0$

$y^2 - 20y + 25 = 0 \implies (y-5)^2 = 0$

$y - 5 = 0 \implies y = 5$

$k = -15 \implies y^2 - (k-5)y + 25 = 0$

$y^2 + 20y + 25 = 0 \implies (y+5)^2 = 0$

$y + 5 = 0 \implies y = -5$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $Z^2 + 16 = (k+4)Z$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+4) \quad , \quad c = 16$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+4)]^2 = -4(1)(16) = 0$

$(k+4)^2 - 64 = 0$

$(k+4)^2 = 64$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 4 = \pm 8$

أما $k + 4 = 8 \implies k = 8 - 4 = 4$

أو $k + 4 = -8 \implies k = -8 - 4 = -12$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 4 \implies Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$Z^2 - 8Z + 16 = 0 \implies (Z-4)^2 = 0$

$Z - 4 = 0 \implies Z = 4$

$k = -12 \implies Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$Z^2 + 8y + 16 = 0 \implies (Z+4)^2 = 0$

$$Z+4=0 \implies Z=-4$$

سؤال : بين أن المعادلة $z^2-6Z+28=0$ ليس لها حل في R

الحل :

$a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=28$

$\Delta= b^2-4ac$

$\Delta= (-6)^2-4(1)(28)=36-112=-76$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

سؤال : جد مجموعة حل المعادلات التالية باستعمال القانون في R

[1] $x^2-7x-14=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=-7\ ,\ c=-14$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-14)}}{2(1)}$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{49+56}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{105}}{2}$$

أما $x=\frac{7+\sqrt{105}}{2}$ أو $x=\frac{7-\sqrt{105}}{2}$

$$S=\left\{\frac{7+\sqrt{105}}{2}\ ,\frac{7-\sqrt{105}}{2}\right\}$$

[2] $y^2+3y-9=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-9$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(1)(-9)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+36}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{45}}{2}$$

أما $y=\frac{-3+\sqrt{45}}{2}$ أو $y=\frac{-3-\sqrt{45}}{2}$

$$S=\left\{\frac{-3+\sqrt{45}}{2}\ ,\frac{-3-\sqrt{45}}{2}\right\}$$

$$x=\frac{8\pm2\sqrt{6}}{10}=\frac{2(4\pm\sqrt{6})}{10}=\frac{4\pm\sqrt{6}}{5}$$

أما $x=\frac{4+\sqrt{6}}{5}$ أو $x=\frac{4-\sqrt{6}}{5}$

$$S=\left\{\frac{4+\sqrt{6}}{5}\ ,\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right\}$$

[3] $9x^2 - 8(3x + 2) = 0$

الحل :

$9x^2 - 24x - 16 = 0$

$a = 9\ ,\ b = -24\ ,\ c = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 576}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{1152}}{18}$$

$$= \frac{24 \pm 24\sqrt{2}}{18} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{3}$$

أما $x = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{3}$ أو $x = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{3}$

$$S = \left\{\frac{4 + 4\sqrt{2}}{3}\ ,\ \frac{4 - 4\sqrt{2}}{3}\right\}$$

[4] $2y^2 - 2 = -10y$

الحل :

$2y^2 + 10y - 2 = 0 \Rightarrow a = 2\ ,\ b = 10\ ,\ c = -2$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 16}}{4} = \frac{-10 \pm \sqrt{116}}{4}$$

$$y = \frac{-10 \pm 2\sqrt{29}}{4} = \frac{2(-5 \pm \sqrt{29})}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ أو $y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}\ ,\ \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

سؤال : حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[1] $x^2 + 4x = 5$

الحل :

$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow a = 1\ ,\ b = 4\ ,\ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

أما $x = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

أو $x=\frac{-4-6}{2}=\frac{-10}{2}=-5 \quad \Rightarrow \quad S=\{1,-5\}$

[2] $y^2-2y-10=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-10$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-2)^2-4(1)(-10)=4+40=44$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبين .

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{44}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{44}}{2}$

$y=\frac{2\pm2\sqrt{11}}{2}=1\pm\sqrt{11}$

أما $y=1+\sqrt{11}$ أو $y=1-\sqrt{11}$

$S=\{1+\sqrt{11},1-\sqrt{11}\}$

[3] $2x^2-5x+7=0$

الحل :

$a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=7$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-5)^2-4(2)(7)=25-56=-31$

مقدار المميز سالب ليس لها حل في R ونوع الجذران غير حقيقيين

[4] $y^2-14y+49=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=-14\ ,\ c=49$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-14)^2-4(1)(49)=196-196=0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان (لهل جذر حقيقي واحد)

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{0}}{2(1)}=\frac{14}{2}=7$

[23] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+6)x+49=0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$a=1\quad ,\ b=-(k+6)\quad ,\ c=49$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+6)]^2-4(1)(49)=0$

$(k+6)^2-196=0$

$(k+6)^2=196$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+6=\pm14$

أما $k+6=14 \quad \Rightarrow \quad k=14-6=8$

أو $k+6=-14 \Rightarrow k=-14-6=-20$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=8 \Rightarrow x^2-(k+6)x+49=0$
$x^2-14x+49=0 \Rightarrow (x-7)^2=0$
$x-7=0 \Rightarrow x=7$
$k=-20 \Rightarrow x^2-(k+6)x+49=0$
$x^2+14x+49=0 \Rightarrow (x+7)^2=0$
$x+7=0 \Rightarrow x=-7$

سؤال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2+36=(k-6)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$4y^2-(k-6)y+36=0$
$a=4 \quad , \quad b=-(k-6) \quad , \quad c=36$
$b^2-4ac=0$
$[-(k-6)]^2-4(4)(36)=0$
$(k-6)^2-576=0$
$(k-6)^2=576$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين
$k-6=\pm 24$
أما $k-6=24 \Rightarrow k=24+6=30$
أو $k-6=-24 \Rightarrow k=-24+6=-18$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=30 \Rightarrow 4y^2-(k-6)y+36=0$
$4y^2-24y+36=0 \Rightarrow (2y-6)^2=0$
$2y-6=0 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3$
$k=-18 \Rightarrow 4y^2-(k-6)y+36=0$
$4y^2+24y+36=0 \Rightarrow (2y+6)^2=0$
$2y+6=0 \Rightarrow 2y=-6 \Rightarrow y=-\frac{6}{2}=-3$

سؤال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $Z^2+81=(k+9)Z$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$Z^2-(k+9)Z+81=0$
$a=1 \quad , \quad b=-(k+9) \quad , \quad c=81$
$b^2-4ac=0$
$[-(k+9)]^2-4(1)(81)=0$
$(k+9)^2-324=0$
$(k+9)^2=324$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين
$k+9=\pm 18$
أما $k+9=18 \Rightarrow k=18-9=9$
أو $k+9=-18 \Rightarrow k=-18-9=-27$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 9 \Rightarrow Z^2 - (k+9)Z + 81 = 0$

$Z^2 - 18 + 81 = 0 \Rightarrow (Z-9)^2 = 0$

$Z - 9 = 0 \Rightarrow Z = 9$

$k = -27 \Rightarrow Z^2 - (k+9)Z + 81 = 0$

$Z^2 + 18Z + 81 = 0 \Rightarrow (Z+9)^2 = 0$

$Z + 9 = 0 \Rightarrow Z = -9$

سؤال : بين أن المعادلة $2Z^2 - 3Z + 10 = 0$ ليس لها حل في R

الحل :

$a = 2 \ , \ b = -3 \ , \ c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(10)$

$= 9 - 80 = -71$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

الطريقة الثانية :

$p^2 - 30p + 225 = 0 \Rightarrow (p-15)^2 = 0$

$p - 15 = 0 \Rightarrow p = 15$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال : **العاب نارية :** في احدى المناسبات اطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع 140m . احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة التالية : $5t^2 + 60t = 140$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار الذي وصلت اليه الألعاب النارية بعد t ثانية .

الحل : الطريقة الاولى

$5t^2 + 60t - 140 = 0 \ \} \div 5$

$t^2 + 12t - 28 = 0$

$a = 1 \ , b = 12 \ , \quad c = -28$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(28)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2}$$

أما $t = \frac{-12 + 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$

أو $t = \frac{-12 - 16}{2} = \frac{-28}{2} = -14$ يهمل

الطريقة الثانية :

$5t^2 + 60t - 140 = 0 \ \} \div 5$

$t^2 + 12t - 28 = 0 \Rightarrow (t+14)(t-2) = 0$

أما $t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14$ يهمل

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ الزمن

سؤال : تجارة : يحسب سامر سعر الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 الف دينار اذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثل مبلغ ربح سامر في البدلة الواحدة بألوف الدنانير فما سعر كلفة البدلة الواحدة ؟

الحل : الطريقة الاولى

$a = 1 \ , \quad b = -30 \ , \quad c = 225$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(225)}}{2(1)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

فـــــــكر

سؤال : تحد : حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R

i) $x^2 + 8x = 10$

الحل :

$x^2 + 8x - 10 = 0 \implies a = 1 \ , \ b = 8 \ , \ c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-10) = 64 + 40 = 104$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2(1)} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{26}}{2}$$

$$= \frac{2(-4 \pm \sqrt{26})}{2} = -4 \pm \sqrt{26}$$

أما $x = -4 + \sqrt{26}$ أو $x = -4 - \sqrt{26}$

$S = \{-4 + \sqrt{26} \ , -4 - \sqrt{26}\}$

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$

الحل :

$3y^2 - 6y - 42 = 0 \ \} \div 3 \implies y^2 - 2y - 14 = 0$

$a = 1 \ , \quad b = -2 \ , \quad c = -14$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-14) = 4 + 56 = 60$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{60}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{2}$$

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{15})}{2} = 1 \pm \sqrt{15}$$

أما $y = 1 + \sqrt{15}$

أو $y = 1 - \sqrt{15} \implies S = \{1 + \sqrt{15} \ , 1 - \sqrt{15}\}$

سؤال : **أصحح الخطأ :** قال سعد أن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ لي لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية . اكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل :

$a = 2 \ , \quad b = -3 \ , \quad c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

أما $x = \frac{3 + 9}{4} = \frac{12}{4} = 3$

أو $x = \frac{3 - 9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \implies S = \left\{3, -\frac{3}{2}\right\}$

سؤال : **حس عددي :** استعملت مروة المقدار المميز لكتابة جذري المعادلة $Z^2 - 8Z + 16 = 0$ دون تحليلها . فسر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة .

الحل :

$a = 1 \ , \quad b = -8 \ , \quad c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

قيمة المقدار المميز يساوي صفر ولها جذر حقيقي واحد .

سؤال : **أكتب** // نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز دون حلها .

الحل :

$x^2 - 20x + 100 = 0 \implies a = 1 \ , \quad b = -20 \ , \quad c = 100$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-20)^2 - 4(1)(100) = 400 - 400 = 0$

قيمة المقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان ولها جذر حقيقي *واحد* .

مراجعة الفصل

مثال 1 // جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 5x - 7 = 0$

الحل :

$$a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -7$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}$$

أما $x = \frac{5 + \sqrt{53}}{2}$ أو $x = \frac{5 - \sqrt{53}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{53}}{2} , \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \right\}$$

تدريب 1 // جد مجموعة حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 3x - 8 = 0$

الحل :

$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$ أو $x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{41}}{2} , \frac{3 - \sqrt{41}}{2} \right\}$$

مثال 2 // حدد جذور المعادلة : $3x^2 + 5x - 2 = 0$

الحل :

$$a = 3 , \ b = 5 \ , \ c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

تدريب 2 // حدد جذور المعادلة : $2x^2 - 7x - 3 = 0$

الحل :

$$a = 2 , \ b = -7 \ , \ c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(-3) = 49 + 24 = 73$$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران غير حقيقين

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة الحل للمعادلات باستعمال القانون العام في R :

[1] $x^2 - 3x - 4 = 0$

a) $S = \{4, 1\}$ b) $S = \{4, -1\}$

c) $S = \{-4, 1\}$ d) $S = \{-4, -1\}$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

أما $x = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ أو $x = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$S = \{4, -1\}$

الجواب فرع (b)

[2] $y^2 - 5y - 5 = 0$

a) $S = \left\{\frac{3 + 5\sqrt{5}}{2} , \frac{3 - 5\sqrt{5}}{2}\right\}$ b) S

$$= \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{4} , \frac{3 - 5\sqrt{5}}{4}\right\}$$

c) $S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} , \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$ d) S

$$= \left\{\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} , \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}\right\}$$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -5$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

أما $y = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$ أو $y = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} , \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$

الجواب فرع (c)

[3] $2x^2 - 8x = -3$

a) $S = \left\{\frac{4 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right\}$ b) S

$$= \left\{\frac{2 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 + \sqrt{10}}{2}\right\}$$

c) $S = \left\{\frac{4 + \sqrt{5}}{4} , \frac{4 - \sqrt{5}}{4}\right\}$ d) S

$$= \left\{\frac{2 + \sqrt{5}}{2} , \frac{2 - \sqrt{5}}{2}\right\}$$

[4] $3x^2 - 6(2x + 1) = 0$

a) $S = \{2 + \sqrt{3} , 2 - \sqrt{3}\}$ b) S

$$= \{2 + \sqrt{2} , 2 - \sqrt{2}\}$$

c) $S = \{2 + \sqrt{6} , 2 - \sqrt{6}\}$ d) S

$$= \{6 + \sqrt{6} , 6 - \sqrt{6}\}$$

الحل :

$3x^2 - 12x - 6 = 0 \ \} \div 3 \implies x^2 - 4x - 2 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -2$

الحل :

$2x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \ , \ b = -8 \ , \ c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2(4 \pm \sqrt{10})}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

أما $x = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$ أو $x = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$

$$S = \left\{\frac{4 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right\}$$

الجواب فرع (a)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

أما $x = 2 + \sqrt{6}$ أو $x = 2 - \sqrt{6}$

$S = \{2 + \sqrt{6} , 2 - \sqrt{6}\}$

الجواب فرع (c)

سؤال : حدد جذور المعادلة باستعمال المميز :

[5] $x^2 - 6x - 7 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان . b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$)

الحل :

$a = 1 \ , \quad b = -6 \ , \quad c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-7) = 36 + 28 = 64$

مقدار المميز موجب ومربع كامل والجذران حقيقيان نسبيان .

الجواب فرع (a)

[6] $2y^2 - 3y - 8 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان . b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$)

الحل :

$a = 2 \ , \quad b = -3 \ , \quad c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-8) = 9 + 64 = 73$

المميز موجب ليس مربع كامل الجذران حقيقيان غير نسبيين

الجواب فرع (b)

[7] $8x^2 - 8x + 2 = 0$

a) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذر حقيقي واحد $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$)

الحل :

$a = 8 \ , \quad b = -8 \ , \quad c = 2$

	$\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-8)^2 - 4(8)(2) = 64 - 64 = 0$ المميز يساوي صفر والجذران حقيقيان متساويان لها جذر حقيقي واحد . الجواب فرع (a)

[8] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k+10)y + 16 = 0$ متساويين ؟

a) $k = 2 , -18$ b) $k = -2 , -18$
c) $k = 6 , 14$ d) $k = -6 , -14$

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+10) \quad , \quad c = 16$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+10)]^2 - 4(1)(16) = 0$

$(k+10)^2 - 16 = 0$

$(k+10)^2 = 16$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 10 = \pm 4$

أما $k + 10 = 4 \implies k = 4 - 10 = -6$

أو $k + 10 = -4 \implies k = -4 - 10 = -14$

الجواب فرع (d)

الدرس [6 – 3] : حل المعادلات الكسرية

نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بتخلص من الكسور .ثم حلها بإحدى طرق التحليل السابقة .

سؤال : اذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة $2x + 3$ الف دينار وثمن شراع ست تحفيات $x^2 + 3x - 1$ الف دينار فاذا كان ثمن تحفية واحدة الى ثمن ست تحفيات $\frac{1}{3}$ فما ثمن شراء تحفية واحدة ؟

الحل :

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ست تحفيات}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-1} = \frac{1}{3}$$ الطرفين في الوسطين

$$x^2 + 3x - 1 = 6x + 9$$
$$x^2 + 3x - 1 - 6x - 9 = 0$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-5) = 0$$

أما $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ يهمل

أو $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$2x + 3 = 2(5) + 3 = 10 + 3 = 13$ الف

ثمن شراء تحفية واحدة هو 13 ألف دينار

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلة التالية ثم تحقق من صحة الحل : $5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$

الحل :

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3} \} \cdot 3x$$
$$3x(5x) + 3x\left(\frac{x-2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 + x - 2 - 2 = 0$$
$$15x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (5x-2)(3x+1) = 0$$

أما $5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

أو $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$$S = \left\{\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

$x = \frac{2}{5} \Rightarrow 5\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\frac{2}{5} - 2}{3\left(\frac{2}{5}\right)} = 2 + \frac{\frac{2-10}{5}}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{-8}{6} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$ الايمن

$x=-\frac{1}{3} \Rightarrow 5\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\frac{-1}{3}-2}{3\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{5}{3}+\frac{\frac{-1-6}{3}}{-\frac{3}{3}}=-\frac{5}{3}+\frac{-7}{-3}=\frac{-5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$ الايمن

سؤال : جد مجموعة الحل للمعادلة في R :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$

الحل :

$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{(x+3)(x-3)}$ $\}\times(x+3)(x-3)$

$x(x+3)+4x(x-3)=18$

$x^2+3x+4x^2-12x-18=0$

$5x^2-9x-18=0 \Rightarrow (x-3)(5x+6)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $5x+6=0 \Rightarrow 5x=-6 \Rightarrow x=-\frac{6}{5}$

$S=\left\{3,-\frac{6}{5}\right\}$

سؤال : جد مجموعة حل المعادلة :

$$\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

الحل :

$\frac{2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$ $\}\times(x+2)(x-2)$

$2(x-2)+x(x+2)=x^2+4$

$2x-4+x^2+2x=x^2+4$

$4x-4+x^2=x^2+4$

$4x-4+x^2-x^2-4=0$

$4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{4}=2$

تأكد من فهمك

سؤال : جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

[1] $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{4x^2}$ $\}\cdot 4x^2$

الحل :

$4x+2x^2=6 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0$ $\}\div 2$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

[2] $\frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{10y}$

الحل :

$\frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{10y}$ $\}\times 10y$

$10y\left(\frac{y}{2}\right)-10y\left(\frac{7}{5}\right)=10y\left(\frac{3}{10y}\right)$

$5y(y)-2y(7)=3$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$\frac{6}{4x^2} = \frac{6}{4(1)^2} = \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{الطرف الايمن}$$

$$5y^2 - 14y - 3 = 0 \Rightarrow (y-3)(5y+1) = 0$$

أما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

أو $5y + 1 = 0 \Rightarrow 5y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

$$y = 3 \Rightarrow \frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{2} - \frac{7}{5} = \frac{15-14}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \quad \text{الايسر}$$

$$\frac{3}{10y} = \frac{3}{10(3)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} \quad \text{الايمن}$$

[3] $\frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$$2x(x+4) = -3(2) \Rightarrow 2x^2 + 8x = -6$$

$$2x^2 + 8x + 6 = 0 \} \div 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

أما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S\{-3, -1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

عندما : $x = -3$

$$\frac{x+4}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{الطرف الأيسر}$$

$$\frac{-3}{2x} = \frac{-3}{2(-3)} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \quad \text{الطرف الأيمن}$$

[4] $\frac{y+1}{2y^2} = \frac{3}{4}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$$2y^2(3) = 4(y+1) \Rightarrow 6y^2 = 4y + 4$$

$$6y^2 - 4y - 4 = 0 \} \div 2 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$a = 3 \ , \quad b = -2 \ , \quad c = -2$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{6}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

أما $y = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ أو $y = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

$$y = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{y+1}{2y^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{7}}{3} + 1}{2\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{7}+3}{3}}{2\left(\frac{1+2\sqrt{7}+7}{9}\right)} = \frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}{2\left(\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}{\frac{16+4\sqrt{7}}{9}}$$

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{3} \times \frac{9}{16+4\sqrt{7}} = \frac{4+\sqrt{7}}{1} \times \frac{3}{4(4+\sqrt{7})}$$
$$= \frac{3}{4}$$

[6] $\frac{1}{y^2-6} = \frac{2}{y+3}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$2y^2 - 12 = y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 12 - y - 3 = 0$

$2y^2 - y - 15 = 0 \Rightarrow (2y+5)(y-3) = 0$

أما $2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y = 3$

الطرف الايسر $\frac{1}{y^2-6} = \frac{1}{(3)^2-6} = \frac{1}{9-6} = \frac{1}{3}$

الطرف الايمن $\frac{2}{y+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

[5] $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5}$ } $\cdot (x-5)$

الحل :

$9x - 14 = x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$(x-7)(x-2) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

التحقق : عندما $x = 7$

الأيسر $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{9(7)-14}{7-5} = \frac{63-14}{2} = \frac{49}{2}$

الطرف لأيمن $\frac{x^2}{x-5} = \frac{(7)^2}{7-5} = \frac{49}{2}$

سؤال : جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[2] $\frac{9}{x^2-x-6} - \frac{5}{x-3} = 1$

الحل :

$\frac{9}{(x-3)(x+2)} - \frac{5}{x-3} = 1$ } $\times (x-3)(x+2)$

$9 - 5(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6$

$9 - 5x - 10 = x^2 - x - 6$

$-1 - 5x = x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 + 1 + 5x = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

أما $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{-5, 1\}$

[1] $\frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{y^2-4}$

الحل :

$\frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{(y+2)(y-2)}$ } $\times (y+2)(y-2)$

$(y-2)(y-4) - 2(y+2) = 17$

$y^2 - 4y - 2y + 8 - 2y - 4 - 17 = 0$

$y^2 - 8y - 13 = 0$

$a = 1 \ , b = -8 \ , \quad c = -13$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-13)}}{2(1)}$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64+52}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{116}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm 2\sqrt{29}}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{29})}{2} = 4 \pm \sqrt{29}$$

أم $y = 4 + \sqrt{29}$ أو $y = 4 - \sqrt{29}$

[3] $\frac{12}{y^2-16} + \frac{6}{y+4} = 2$

الحل :

$$\frac{12}{(y+4)(y-4)} + \frac{6}{y+4} = 2 \quad \} \times (y+4)(y-4)$$

$$12 + 6(y-4) = 2(y+4)(y-4)$$

$$12 + 6y - 24 = 2(y^2 - 16)$$

$$6y - 12 = 2y^2 - 32$$

$$2y^2 - 32 - 6y + 12 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 6y - 20 = 0$$

$$(y-5)(2y+4) = 0$$

أما $y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

أو $2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{2} = -2$

$S = \{5, -2\}$

[4] $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

الحل :

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{(x+1)(x-1)} \quad \} \times (x+1)(x-1)$$

$$2x(x-1) + 3x(x+1) = 8 + 7x + 3x^2$$

$$2x^2 - 2x + 3x^2 + 3x - 8 - 7x - 3x^2$$

$$2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(2x+2) = 0$$

أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} = -1$

$S = \{4, -1\}$

تدرب وحل التمرينات

سؤال : جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

[1] $\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \quad \} \cdot (6x^2)$

الحل :

$$4 + 2x^2 = 6x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \} \div 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{2, 1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

[2] $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

الحل :

$$\frac{3y}{4} - \frac{2}{4y} + \frac{1}{4} = 0 \quad \} \times 4y$$

$$3y^2 - 2 + y = 0 \Rightarrow 3y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y+1)(3y-2) = 0$$

أما $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

أو $3y - 2 = 0 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

عندما: $y = -1$

$$\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = \frac{3(-1)}{4} - \frac{2}{4(-1)} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{-3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{0}{4} = 0 \quad \text{الطرف الأيمن}$$

عندما: $x = 2$

$$\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6(2)^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6}$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{الطرف الأيسر}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{الطرف الأيمن}$$

عندما: $x = 1$

$$\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6(1)^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{3}$$
$$= \frac{3}{3} = 1 \quad \text{الطرف الأيسر}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{الطرف الأيمن}$$

[13] $\frac{9x+22}{x^2} = 1$ الطرفين في الوسطين

الحل:

$$x^2 = 9x + 22 \implies x^2 - 9x - 22 = 0$$
$$(x-11)(x+2) = 0$$

أما $x - 11 = 0 \implies x = 11$

أو $x + 2 = 0 \implies x = -2 \implies S = \{11, -2\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما: $x = -2$

$$\frac{9x+22}{x^2} = \frac{9(-2)+22}{(-2)^2} = \frac{-18+22}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

الطرف الأيمن

$$\frac{9}{(y+2)^2} = \frac{9}{(1+2)^2} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{الطرف الأيسر}$$
$$\frac{3y}{y+2} = \frac{3(1)}{1+2} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{الطرف الأيمن}$$

[14] $\frac{9}{(y+2)^2} = \frac{3y}{y+2}$

الحل:

$$\frac{9}{(y+2)^2} = \frac{3y}{y+2} \quad \} \cdot (y+2)^2$$
$$9 = 3y(y+2) \implies 3y^2 + 6y - 9 = 0 \} \div 3$$
$$y^2 + 2y - 3 = 0 \implies (y+3)(y-1) = 0$$

أما $y + 3 = 0 \implies y = -3$

أو $y - 1 = 0 \implies y = 1 \implies S = \{-3, 1\}$

التحقق من صحة الحل: عندما: $y = 1$

سؤال: جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R:

[1] $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1$

الحل:

$$\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1 \quad \} \cdot (x-4)(x-3)$$
$$3(x-3) - 2(x-4) = (x-4)(x-3)$$
$$3x - 9 - 2x + 8 = x^2 - 3x - 4x + 12$$
$$x - 1 = x^2 - 7x + 12$$
$$x^2 - 7x + 12 - x + 1 = 0$$
$$x^2 - 8x + 13 = 0 \implies a = 1, b = -8, c = 13$$

[2] $\frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{4y^2-24}{y^2-25}$

الحل:

$$\frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{4y^2-24}{(y+5)(y-5)} \quad \}$$
$$\times (y+5)(y-5)$$
$$(y-5)^2 - (y+5)^2 = 2y^2 - 24$$
$$y^2 - 10y + 25 - (y^2 + 10y + 25) = 4y^2 - 24$$
$$4y^2 - 24 - y^2 + 10y - 25 + y^2 + 10y + 25 = 0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(13)}}{2(1)}$$
$$=\frac{8\pm\sqrt{64-52}}{2}$$
$$x=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{3})}{2}=4\pm\sqrt{3}$$

أما $x=4+\sqrt{3}$ أو $x=4-\sqrt{3}$

$$S=\{4+\sqrt{3},4-\sqrt{3}\}$$

$$4y^2+20y-24=0 \quad \}\div 4$$
$$y^2+5y-6=0 \Rightarrow (y+6)(y-1)=0$$

أما $y+6=0 \Rightarrow y=-6$

أو $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\{-6,1\}$

[3] $\frac{6-x}{x^2+x-12}-\frac{2}{x+4}=1$

الحل:

$$\frac{6-x}{(x+4)(x-3)}-\frac{2}{x+4}=1 \quad \}\times(x+4)(x-3)$$
$$6-x-2(x-3)=x^2-3x+4x-12$$
$$6-x-2x+6=x^2+x-12$$
$$12-3x=x^2+x-12$$
$$x^2+x-12-12+3x=0$$
$$x^2+4x-24=0$$

$a=1$, $b=4$, $c=-24$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{16+96}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{112}}{2}$$
$$x=\frac{-4\pm4\sqrt{7}}{2}=-2\pm2\sqrt{7}$$

أما $x=-2+\sqrt{7}$ او $x=-2-\sqrt{7}$

[4] $\frac{4+8y}{y^2-9}+\frac{6}{y+3}=3$

الحل:

$$\frac{4+8y}{(y+3)(y-3)}+\frac{6}{y+3}=3 \quad \}\times(y+3)(y-3)$$
$$4+8y+6(y-3)=3(y+3)(y-3)$$
$$4+8y+6y-18=3(y^2-9)$$
$$14y-14=3y^2-27$$

$$3y^2-27+14-14y=0 \Rightarrow 3y^2-14y-13=0$$

$a=3$, $b=-14$, $c=-13$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(3)(-13)}}{2(3)}$$
$$=\frac{14\pm\sqrt{196+156}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{352}}{6}$$
$$y=\frac{14\pm4\sqrt{22}}{6}=\frac{2(7\pm2\sqrt{22})}{6}=\frac{7\pm2\sqrt{22}}{3}$$

أما $y=\frac{7+2\sqrt{22}}{3}$ أو $y=\frac{7-2\sqrt{22}}{3}$

$$S=\left\{\frac{7+2\sqrt{22}}{3},\frac{7-2\sqrt{22}}{3}\right\}$$

تدرب وحل مسائل الحياتية

سؤال : نقل مسافرين : تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة 350km بين مدينة بغداد واربيل بسرعة معينة ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 10 km/h لتمكنت الطائرة من قطع المسافة بزمن يقل 10 دقائق عن الزمن الأول . جد سرعة أولاً .

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

الحل : نفرض السرعة الأولى $= V$

السرعة الثانية $= V + 10$

الزمن الأول $= \frac{35}{V}$, الزمن الثاني $= \frac{350}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= \frac{1}{6}$

$$\frac{350}{V} - \frac{350}{V+10} = \frac{1}{6} \quad \} \times 6V(V+10)$$

نحول الزمن من دقائق الى ساعة $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

$$2100(V+10) - 210V = V(V+10)$$
$$2100V + 21000 - 2100V = V^2 + 10V$$
$$V^2 + 10V - 21000 = 0$$
$$(V+150)(V-140) = 0$$

أما $V + 150 = 0 \Rightarrow V = -150$ يهمل

أو $V - 140 = 0 \Rightarrow V = 140$ km/h السرعة

[20] رياضة : اذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60km بين مدينتين A, B بسرعة معينة ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول . جد سرعته أولا .

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

الحل : نفرض السرعة الأولى $= V$

السرع الثانية $= V + 10$

الزمن الأول $= \frac{6}{V}$, الزمن الثاني $= \frac{60}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= 1$

$$\frac{60}{V} - \frac{60}{V+10} = 1 \quad \} \times V(V+10)$$
$$60(V+10) - 60V = V(V+10)$$
$$60V + 600 - 60V = V^2 + 10V$$
$$V^2 + 10V - 600 = 0$$
$$(V+30)(V-20) = 0$$

أما $V + 30 = 0 \Rightarrow V = -30$ يهمل

أو $V - 20 = 0 \Rightarrow V = 20$ km/h سرعته

سؤال : **سباق :** شارك نوفل في سباق ثلاثي وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري واستغرق ساعتين لأنهه السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة . جد معدل السرعة التقريبية في سباق السباحة .

	المسافة km	السرعة km/h	الزمن
السباحة	$d_s = 1$	x	t_s
ركوب الدراجة	$d_b = 20$	$5x$	t_b
الجري	$d_r = 4$	$x + 4$	t_r

ملاحظة : أستعمل معادلة الزمن الأجمالي الذي أستغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو :

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

الحل :

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$t_s = \frac{1}{x} \quad , \quad t_b = \frac{20}{5x} = \frac{4}{x} \, , t_r = \frac{4}{x+4} \, , T(x) = 2$$

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x+4} = 2 \quad \} \cdot x(x+4)$$

$$x + 4 + 4(x+4) + 4x = 2x(x+4)$$

$$x + 4 + 4x + 16 + 4x = 2x^2 + 8x$$

$$9x + 20 = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 8x - 9x - 20 = 0$$

$$2x^2 - x - 20 = 0 \implies a = 2 \, , b = -1 \, , c = -20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-20)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 160}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{161}}{4} \approx \frac{1 \pm 13}{4}$$

أما $x \approx \frac{1+13}{4} \approx \frac{14}{4} \approx \frac{7}{2} \approx 3.5 \approx 4$

أو $x \approx \frac{1-13}{4} \approx \frac{-12}{4} \approx -3$ يهمل

السرعة تقريباً هي : $x \approx 4 \, km/h$

فكـــــــر

سؤال : **تحد :** جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

i) $\frac{3}{x+5}+\frac{4}{5-x}=\frac{x^2-15x+14}{x^2-25}$

الحل :

$$\frac{3}{x+5}-\frac{4}{x-5}=\frac{x^2-15x+14}{(x+5)(x-5)} \quad \} \times (x+5)(x-5)$$

$$3(x-5)-4(x+5)=x^2-15x+14$$
$$3x-15-4x-20=x^2-15x+14$$
$$-x-35=x^2-15x+14$$
$$x^2-15x+14+x+35=0$$
$$x^2-14x+49=0$$
$$(x-7)^2=0 \implies x-7=0 \implies x=7$$

أصحح الخطأ : استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة : $\frac{2}{x-7}\times\frac{1}{x-1}=1$

فقال نمير أن للمعادلة جذران نسبيان حقيقيان . اكتشف خطأ نمير وصححه .

الحل :

$$\frac{2}{x^2-x-7x+7}=1$$
$$\frac{2}{x^2-8x+7}=1 \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$
$$x^2-8x+7=2 \implies x^2-8x+7-2=0$$
$$x^2-8x+5=0 \implies a=1\ ,b=-8\ ,c=5$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(-8)^2-4(1)(5)=64-20=44$$

المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

سؤال : **أكتب //** مجموعة الحل في R

$$\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-6}=2$$

الحل :

$$\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-6}=2 \quad \} \times (x+6)(x-6)$$
$$x-6-5(x+6)=2(x+6)(x-6)$$
$$x-6-5x-30=2(x^2-36)$$
$$-4x-36=2x^2-72$$
$$2x^2-72+4x+36=0$$
$$2x^2+4x-36=0 \quad \} \div 2$$
$$x^2+2x-18=0 \implies a=1\ ,b=2\ ,c=-18$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-18)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+72}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{76}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{19}}{2}=$$
$$x=-1\mp\sqrt{19}$$

أما $x=-1+\sqrt{19}$ أو $x=-1-\sqrt{19}$

$$S=\{-1+\sqrt{19},-1-\sqrt{19}\}$$

مراجعة الفصل

مثال // جد مجموعة الحل للمعادلة في R وتحقق من صحة

الحل :

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{12}{x^2-1}$$

الحل :

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{12}{(x+1)(x-1)}\ \}\times(x+1)(x-1)$$
$$x(x+1)+3x(x-1)=12$$
$$x^2+x+3x^2-3x-12=0$$
$$4x^2-2x-12=0\ \Rightarrow\ (2x-4)(2x+3)=0$$

أما $2x-4=0\ \Rightarrow\ 2x=4\ \Rightarrow\ x=\frac{4}{2}=2$

أو $2x+3=0\ \Rightarrow\ 2x=-3\ \Rightarrow\ x=-\frac{3}{2}$

$$S=\left\{2,-\frac{3}{2}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة الأصلية :

عندما : $x=2$

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{2}{2-1}+\frac{3(2)}{2+1}=\frac{2}{1}+\frac{6}{3}$$
$$=2+2=4$$ الطرف الايسر

$$\frac{12}{x^2-1}=\frac{12}{(2)^2-1}=\frac{12}{3}=4$$ الطرف الايمن

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

تدريب // جد مجموعة الحل للمعادلة في R وتحقق من صحة

الحل :

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}$$

الحل :

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{32}{(x+4)(x-4)}\ \}\cdot(x+4)(x-4)$$
$$2x(x+4)+x(x-4)=32$$
$$2x^2+8x+x^2-4x-32=0$$
$$3x^2+4x-32=0\ \Rightarrow\ (x+4)(3x-8)=0$$

أما $x+4=0\ \Rightarrow\ x=-4$

أو $3x-8=0\ \Rightarrow\ 3x=8\ \Rightarrow\ x=\frac{8}{3}$

$$S=\left\{-4,\frac{8}{3}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة الأصلية :

عندما : $x=-4$

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{2(-4)}{-4-4}+\frac{-4}{-4+4}=\frac{-8}{-8}-\frac{4}{0}$$

غير ممكن

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[1] $\frac{2}{12x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4x}$

a) $S=\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$ b) $S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

c) $S=\left\{2,-\frac{1}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$

الحل :

$\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4x}$ $\}\times 12x^2$

$2-2x^2=3x \Rightarrow 2x^2+3x-2=0$

$(x+2)(2x-1)=0$

أما $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

أو $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

الجواب فرع (b)

[2] $\frac{5}{6}-\frac{7}{6y}+\frac{y}{3}=0$

a) $S=\left\{1,-\frac{7}{2}\right\}$ b) $S=\left\{-1,-\frac{7}{2}\right\}$

c) $S=\left\{1,\frac{7}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-1,\frac{7}{2}\right\}$

الحل :

$\frac{5}{6}-\frac{7}{6y}+\frac{y}{3}=0$ $\}\times 6y$

$5y-7+2y^2=0 \Rightarrow 2y^2+5y-7=0$

$(2y+7)(y-1)=0$

أما $2y+7=0 \Rightarrow 2y=-7 \Rightarrow y=-\frac{7}{2}$

او $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\left\{1,-\frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع (a)

[3] $\frac{8x}{5}=\frac{5}{8x}$

a) $S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{8}{5}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{5}{8},\frac{8}{5}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{5}{8}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{8}{5},-\frac{8}{5}\right\}$

الحل : الطرفين في الوسطين

$64x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{64} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{64}}$

$x=\pm\frac{5}{8} \Rightarrow S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{5}{8}\right\}$

الجواب فرع (d)

[4] $\frac{1+2y}{3y+9}=\frac{y}{2}$

a) $S=\left\{1,\frac{1}{3}\right\}$ b) $S=\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$

c) $S=\left\{2,\frac{1}{3}\right\}$ d) $S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

الحل : الطرفين في الوسطين

$y(3y+9)=2(1+2y) \Rightarrow 3y^2+9y=2+4y$

$3y^2+9y-2-4y=0 \Rightarrow 3y^2+5y-2=0$

$(y+2)(3y-1)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $3y-1=0 \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $\frac{16x-64}{x^2}=1$

a) $x=-8$ b) $x=8$ c) $x=-6$ d) $x=6$

الحل: الطرفين في الوسطين

$x^2=16x-64 \Rightarrow x^2-16x+64=0$

$(x-8)^2=0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8$

الجواب فرع (b)

سؤال: جد مجموعة حل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

[6] $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}=1$

a) $S=\{2+\sqrt{7},2-\sqrt{7}\}$ b) $S=\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

c) $S=\{1+\sqrt{7},1-\sqrt{7}\}$ d) $S=\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$

الحل:

$\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}=1 \}\times(x-2)(x-1)$

$2(x-1)-3(x-2)=(x-2)(x-1)$

$2x-2-3x+6=x^2-x-2x+2$

$-x+4=x^2-3x+2$

$x^2-3x+2+x-4=0 \Rightarrow x^2-2x-2=0$

$a=1, \quad b=-2, \quad c=-2$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

أما $x=1+\sqrt{3}$ أو $x=1-\sqrt{3}$

$S=\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

الجواب فرع (b)

[7] $\frac{y-6}{y+6}-\frac{y+6}{y-6}=\frac{24y^2+6}{y^2-36}$

a) $y=-\frac{1}{3}$ b) $y=-\frac{1}{2}$ c) $y=\frac{1}{3}$ d) $y=\frac{1}{2}$

الحل:

$\frac{y-6}{y+6}-\frac{y+6}{y-6}=\frac{24y^2+6}{(y+6)(y-6)} \}\times(y+6)(y-6)$

$(y-6)^2-(y+6)^2=24y^2+6$

$y^2-12y+36-(y^2+12y+36)=24y^2+6$

$y^2-12y+36-y^2-12y-36=24y^2+6$

$-24y=24y^2+6$

$24y^2+24y+6=0\}\div6 \Rightarrow 4y^2+4y+1=0$

$(2y+1)^2=0 \Rightarrow 2y+1=0$

$2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

الجواب فرع (b)

[8] $\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+12x+81}{x^2-9}$ a) $x=-9$ b) $x=9$ c) $x=-8$ d) $x=8$

الحل :

$$\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+12x+81}{(x+3)(x-3)} \quad \}\times(x+3)(x-3)$$

$$x(x-3)-x(x+3)=x^2+12x+81$$

$$x^2-3x-x^2-3x=x^2+12x+81 \quad \Rightarrow \quad -6x=x^2+12x+81$$

$$x^2+12x+81+6x=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+18x+81=0$$

$$(x+9)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x+9=0 \quad \Rightarrow \quad x=-9$$

الجواب فرع (a)

[9] $\frac{3y}{y-4}+\frac{y}{y-2}=\frac{5y^2-4y+8}{y^2-6y+8}$ a) $S=\{4,-2\}$ b) $S=\{-4,-2\}$ c) $S=\{-4,2\}$ d) $S=\{4,2\}$

الحل :

$$\frac{3y}{y-4}+\frac{y}{y-2}=\frac{5y^2-4y+8}{(y-4)(y-2)} \quad \}\times(y-4)(y-2)$$

$$3y(y-2)+y(y-4)=5y^2-4y+8$$

$$3y^2-6y+y^2-4y=5y^2-4y+8$$

$$4y^2-10y=5y^2-4y+8 \quad \Rightarrow \quad 5y^2-4y+8-4y^2+10y=0$$

$$y^2+6y+8=0 \quad \Rightarrow \quad (y+4)(y+2)=0$$

أما $y+4=0 \quad \Rightarrow \quad y=-4$

أو $y+2=0 \quad \Rightarrow \quad y=-2 \quad \Rightarrow \quad S=\{-4,-2\}$

الجواب فرع (b)

الدرس [7 – 3] : خطة حل المسألة (كتابة المعادلة):

تعلم // تقطع باخرة شحن مسافة 240km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول . جد سرعة الباخرة أولا .

أفهم : ما المعطيات في السؤال ؟

باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B

بسرعة معينة وتطعها بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .

ما المطلوب من المسألة ؟ إيجاد سرعة الباخرة أولاً

خطط : أكتب معادلة تمثل المسألة ثم حلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً

حل :

نفرض سرعة الباخرة الأولى $= V$, الزمن الأول $= \frac{240}{V}$

سرعة الباخرة الثانية $= V + 10$, الزمن الثاني $= \frac{240}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= 2$

$$\frac{240}{V} - \frac{240}{V+10} = 2 \quad \} \times V(V+10)$$

$$240(V+10) - 240V = 2V(V+10)$$

$$240V + 2400 - 240V = 2V^2 + 20V$$

$$2V^2 + 20V - 2400 = 0 \quad \} \div 2$$

$$V^2 + 10V - 1200 = 0 \implies (V+40)(V-30) = 0$$

أما $V + 40 = 0 \implies V = -40$ يهمل

أو $V - 30 = 0 \implies V = 30$ km/h سرعة الباخرة

تحقق من صحة الحل :

$\frac{240}{V} = \frac{240}{30} = 8h$ الزمن الأول

$\frac{24}{V+10} = \frac{240}{30+10} = \frac{240}{40} = 6h$ الزمن الثاني

مسائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة المعادلة)

سؤال : **نافورة** : زرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها $4m$ بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84m^2$. ما طول ضلع الحديقة ؟

الحل : نفرض طول ضلع الحديقة $= x$ ومساحة الحديقة $= x^2$

مساحة المنطقة المزروعة $4 \times 4 = 16$

مساحة الحديقة - مساحة المنطقة المزروعة $= 84$

$x^2 - 16 = 84 \implies x^2 = 84 + 16$

$x^2 = 100 \implies x = \pm 10$ أما $x = -10$ يهمل

أو $x = 10\ m$ طول ضلع الحديقة

التحقق :

$x^2 - 16 = (10)^2 - 16 = 100 - 16 = 84$

سؤال : **أسد بابل** : هو تمثال لأسد عثر عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776 وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $15m^2$. فما أبعادها ؟

الحل : نفرض العرض $= x$ والطوال $x + 2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x + 2) = 15 \implies x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

أما $x + 5 = 0 \implies x = -5$ يهمل

أو $x - 3 = 0 \implies x = 3m$ العرض

$x + 2 = 3 + 2 = 5m$ الطول

التحقق :

$3 \times 5 = 15\ m^2$ المساحة

سؤال : **الأسد** : وهو من اقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويلقب الأسد بملك الغابة نسبة الى قوته بين الحيوانات في الغابة اذا كانت المعادلة $x^2 - 30x = 175$ تمثل المساحة التي يبسط الأسد سيطرته عليها بالكيلومترات . ما طول ضلع المنطقة

الحل :

$x^2 - 30x - 175 = 0 \Rightarrow (x - 35)(x + 5) = 0$

أما $x - 35 = 0 \Rightarrow x = 35\ km$ طول ضلع المنطقة

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ يهمل

التحقق :

$x^2 - 30x = (35)^2 - 30(35)$
$= 1225 - 1050 = 175$

سؤال : **ألعاب نارية** : في أحدى المناسبات أطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع 140 . احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة الآتية : $2t^2 - 30t = 200$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار التي تصل اليه الألعاب النارية بعد t ثانية .

الحل :

$2t^2 - 30t - 200 = 0 \} \div 2$
$t^2 - 15t - 100 = 0 \Rightarrow (t - 20)(t + 5) = 0$

أما $t - 20 = 0 \Rightarrow t = 20\ s$

أو $t + 5 = 0 \Rightarrow t = -5$ يهمل

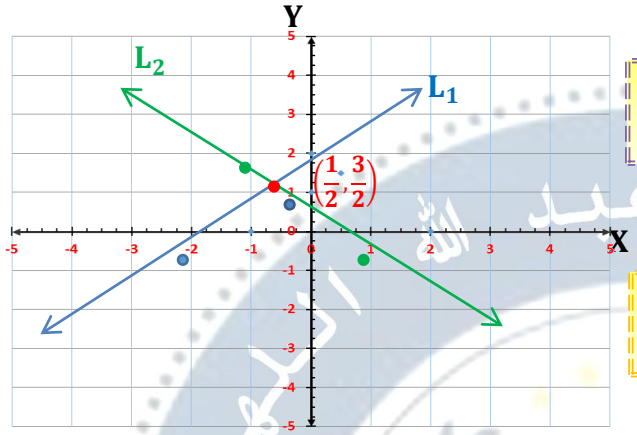
التحقق :

$2t^2 - 30t = 2(20)^2 - 30(20)$
$= 800 - 600 = 200$

اختبار الفصل

سؤال : جد مجموعة حل المعادلتين بيانيا في R

$[1]\ y = 1 + x \quad ---- (1)$
$y = 2 - x \quad ---- (2)$



الحل : نرمز للمعادلة $(1)\ y = 1 + x$ بالرمز L_1

$y = 1 - 0 \Rightarrow y = 1$
$0 = 1 + x \Rightarrow x = -1$

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
−1	0	(−1, 0)

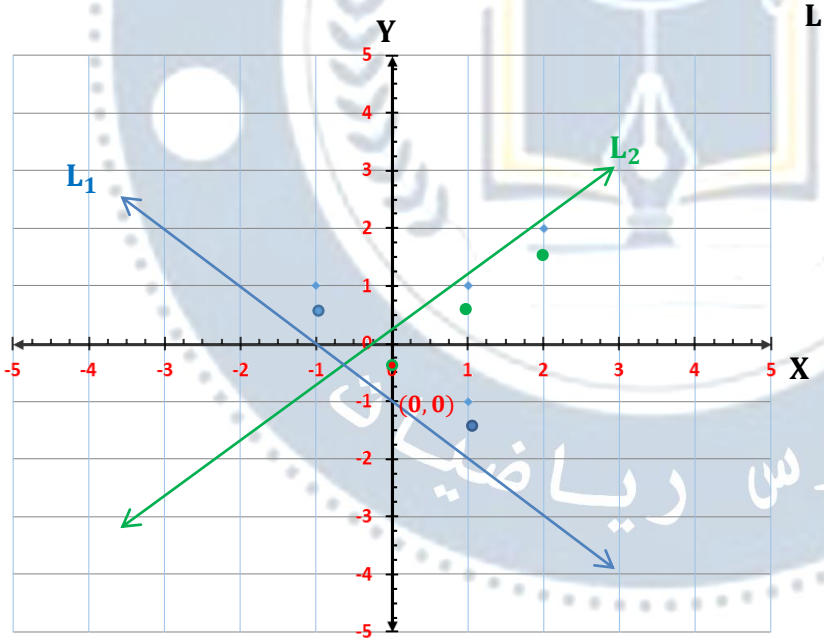
نرمز للمعادلة $(2)\ y = 2 - x$ بالرمز L_2

$y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$
$0 = 2 - x \Rightarrow x = 2$

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

$[2]\ y + x = 0 \quad --- (1)$
$y - x = 0 \quad --- (2)$



الحل : نرمز للمعادلة $(1)\ y + x = 0$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
−1	1	(−1, 1)

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$
$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

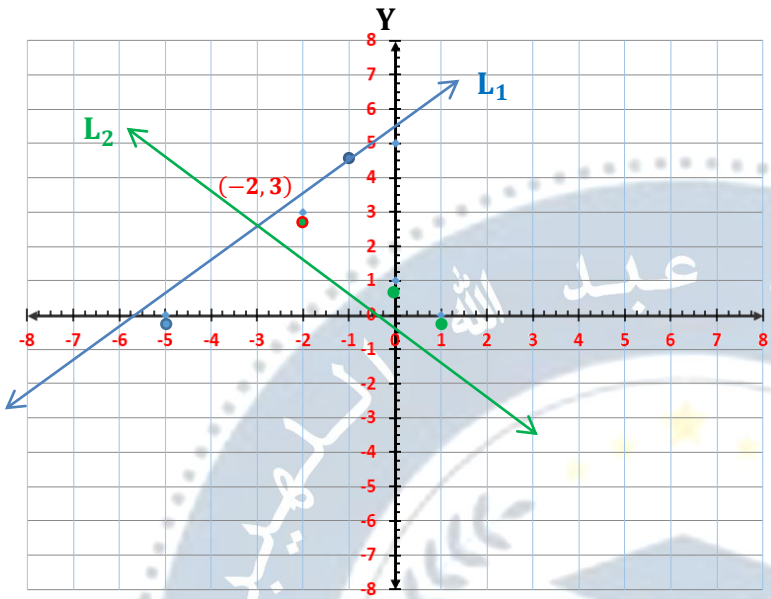
نرمز للمعادلة $(2)\ y - x = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

مجموعة حل النظام : $\{(0, 0)\}$

[3] $y - x - 5 = 0$ ——— (1)
$y + x - 1 = 0$ ——— (2)



الحل : نرمز للمعادلة (1) $y - x - 5 = 0$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
−5	0	(−5, 0)

$y - 0 - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$
$0 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

نرمز للمعادلة (2) $y + x - 1 = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

$y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$0 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

مجموعة حل النظام : $\{(-2, 3)\}$

سؤال : جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي :

[4] $2x + y = 1$ ——— (1)
$x - y = 8$ ——— (2)

الحل :

$2x + y = 1$ ——— (1)
$x - y = 8$ ——— (2) بالجمع

$3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$

نعوض قيمة $x = 3$ في معادلة (1)

$2(3) + y = 1 \Rightarrow 6 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 6$
$= -5$

مجموعة حل النظام : $\{(3, -5)\}$

[5] $4x - 2y = -4$ ——— (1)
$x + y = 6$ ——— (2) $\times 2$

الحل :

$4x - 2y = -4$ ——— (1)
$2x + 2y = 12$ ——— (2) بالجمع

$6x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

نعوض قيمة $x = \frac{4}{3}$ في معادلة (2)

$\frac{4}{3} + y = 6 \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3} = \frac{18 - 4}{3} = \frac{14}{3}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)\right\}$

[6] $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ـــــ (1) $\}\times 6$

$x+y=2$ ـــــ (2) $\}\times 3$

الحل: بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$2x+3y=6$ ـــــ (1)

$\mp 3x \mp 3y = \mp 6$ ـــــ (2) بالطرح

$-x=0 \Rightarrow x=0$

نعوض قيمة $x=0$ في معادلة (2)

$0+y=2 \Rightarrow y=2$

مجموعة حل النظام: $\{(0,2)\}$

سؤال: حل المعادلة التالية في R باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

[7] $9x^2-25=0$

الحل:

$(3x+5)(3x-5)=0$

أما $3x+5=0 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$

أو $3x-5=0 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$S=\{\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\}$

[8] $3y^2-12=0$

الحل:

$3(y^2-4)=0 \}\div 3 \Rightarrow y^2-4=0$

$(y+2)(y-2)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow S=\{2,-2\}$

[9] $(7-Z)^2-1=0$

الحل:

$(7-Z+1)(7-Z-1)=0$

$(8-Z)(6-Z)=0$

أما $8-Z=0 \Rightarrow Z=8$

أو $6-Z=0 \Rightarrow Z=6 \Rightarrow S=\{8,6\}$

سؤال: حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

[10] $x^2=49$

الحل:

$x=\pm\sqrt{49} \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow S=\{7,-7\}$

[11] $81-y^2=0$

الحل:

$y^2=81 \Rightarrow y=\pm\sqrt{81} \Rightarrow y=\pm 9$

$S=\{9,-9\}$

[12] $Z^2 = \frac{36}{9}$ $Z = \pm\sqrt{\frac{36}{9}} \Rightarrow Z = \pm\frac{6}{3} = \pm 2 \Rightarrow S = \{2, -2\}$	

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[13] $x^2 + 9x + 18 = 0$ الحل : $(x+6)(x+3) = 0$ أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S =$ أو$\{-6, -3\}$	[14] $Z^2 - 2Z - 48 = 0$ الحل : $(Z-8)(Z+6) = 0$ أما $Z - 8 = 0 \Rightarrow Z = 8$ أو $Z + 6 = 0 \Rightarrow Z = -6 \Rightarrow S = \{8, -6\}$
[15] $3x^2 - x - 10 = 0$ الحل : $(x-2)(3x+5) = 0$ أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ أو $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$ $S = \left\{2, -\frac{5}{3}\right\}$	[16] $7Z^2 - 18Z - 9 = 0$ الحل : $(Z-3)(7Z+3) = 0$ أما $Z - 3 = 0 \Rightarrow Z = 3$ أو $7Z + 3 = 0 \Rightarrow 7Z = -3 \Rightarrow Z = -\frac{3}{7}$ $S = \left\{3, -\frac{3}{7}\right\}$

سؤال : ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3 ؟

الحل : نفرض العدد $= x$, أربعة أمثاله $= 4x$

مربع العدد $= x^2$

$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$

سؤال : حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته $48m^2$. ما أبعاد المسبح ؟

الحل : نفرض عرض المسبح $= x$, مثلي عرضه $= 2x$

طول المسبح $= 2x + 4$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$$x(2x+4) = 48 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 48 = 0$$
$$(x+6)(2x-8) = 0$$

$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ يهمل أما

$2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8$ أو

$x = \frac{8}{2} = 4m$ العرض

$2x + 4 = 2(4) + 4 = 8 + 4 = 12m$ الطول

سؤال : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[1] $x^2 - 16x + 64 = 0$

الحل :

$(x-8)^2 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

[2] $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}Z + \frac{1}{4}Z^2 = 0$

الحل :

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z = 0$$
$$\frac{1}{2}Z = \frac{1}{3} \Rightarrow 3Z = 2 \Rightarrow Z = \frac{2}{3}$$

سؤال : حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2 - 14x = 32$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2$

$= 49$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 14x + 49 = 32 + 49$

$(x-7)^2 = 81$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 7 = \pm 9$

$x - 7 = 9 \Rightarrow x = 9 + 7 = 16$ أما

$x - 7 = -9 \Rightarrow x = -9 + 7 = -2$ أو

$S = \{16, -2\}$

[2] $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل :

$5Z^2 + 6Z = 9 \} \div 5 \Rightarrow Z^2 + \frac{6}{5}Z = \frac{9}{5}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + \frac{6}{5}Z + \frac{9}{25} = \frac{9}{5} + \frac{9}{25}$

$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{45+9}{25}$

$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{25}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$Z+\frac{3}{5}=\pm\frac{3\sqrt{6}}{5}$$

$$Z+\frac{3}{5}=\pm\frac{3\sqrt{6}}{5}$$

أما $Z+\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z=\frac{\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{5} \Rightarrow Z=\frac{\sqrt{3}-3}{5}$

أو $Z+\frac{3}{5}=-\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z=\frac{-\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{5}$

$Z=\frac{-\sqrt{3}-3}{5} \Rightarrow S=\left\{\frac{\sqrt{3}-3}{5},\frac{-\sqrt{3}-3}{5}\right\}$

سؤال : جد مجموعة حلول المعادلات التالية باستعمال القانون العام في R

[24] $x^2-3x-7=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-7$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{9+28}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$$

أما $x=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ أو $x=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$

$$S=\left\{\frac{3+\sqrt{37}}{2},\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$$

[25] $3y^2-12y=-3$

الحل :

$3y^2-12y+3=0$

$a=3\ ,\ b=-12\ ,\ c=3$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(3)(3)}}{2(3)}$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{144-36}}{6}=\frac{12\pm\sqrt{108}}{6}$$

$$y=\frac{12\pm6\sqrt{3}}{6}=\frac{6(2\pm\sqrt{3})}{6}=2\pm\sqrt{3}$$

أما $y=2+\sqrt{3}$

أو $y=2-\sqrt{3} \Rightarrow S=\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$

[26] $5Z^2+6Z=9$

الحل :

$5Z^2+6Z-9=0 \Rightarrow a=5\ ,\ b=6\ ,\ c=-9$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(5)(-9)}}{2(5)}$$
$$=\frac{6\pm\sqrt{36+180}}{10}=\frac{6\pm\sqrt{216}}{10}$$
$$Z=\frac{6\pm6\sqrt{6}}{10}=\frac{2(3\pm3\sqrt{6})}{10}=\frac{3\pm3\sqrt{6}}{5}$$
أما $Z=\frac{3+3\sqrt{6}}{5}$ أو $Z=\frac{3-3\sqrt{6}}{5}$
$$S=\left\{\frac{3+3\sqrt{6}}{5},\frac{3-3\sqrt{6}}{5}\right\}$$

سؤال : حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[1] $2x^2+8x+8=0$

الحل :

$a=2\ ,\ b=8\ ,\ c=8$
$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta=(8)^2-4(2)(8)=64-64=0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{0}}{2(2)}=\frac{-8}{4}=-2$$

[2] $y^2-6y-9=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=-9$
$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta=(-6)^2-4(1)(-9)=36+36=72$

مقدار المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيان .

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{72}}{2(1)}=\frac{6\pm6\sqrt{2}}{4}$$
$$y=\frac{2(3\pm3\sqrt{2})}{4}=\frac{3\pm3\sqrt{2}}{2}$$
أما $y=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ أو $y=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$
$$S=\left\{\frac{3+3\sqrt{2}}{2},\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right\}$$

[3] $4Z^2 - 3Z + 7 = 0$

الحل :

$a = 4 \ , \ b = -3 \ , \ c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(4)(7) = 9 - 112 = -103$

مقدار المميز سالب ونوع الجذران غير حقيقيان وليس لها حل في R

سؤال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+6)x + 9 = 0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \ , \ b = -(k+6) \ , \ c = 9$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+6)]^2 - 4(1)(9) = 0$

$(k+6)^2 - 36 = 0$

$(k+6)^2 = 36$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 6 = \pm 6$

أما $k + 6 = 6 \Rightarrow k = 6 - 6 = 0$

أو $k + 6 = -6 \Rightarrow k = -6 - 6 = -12$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

عندما : $k = 0$

$x^2 - (k+6)x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

عندما : $k = -12$

$x^2 - (k+6)x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

سؤال : جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل

[31] $\frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$36x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{36} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{36}}$

$x = \pm\frac{5}{6}$

أما $x = \frac{6}{5}$ أو $x = -\frac{6}{5}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

[32] $\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$

الحل :

$\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \ \} \times 6y^2$

$1 + 3y^2 = 6y \Rightarrow 3y^2 - 6y + 1 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = 1$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$

عندما: $x=\frac{5}{6}$

$\frac{6x}{5}=\frac{6\left(\frac{5}{6}\right)}{5}=\frac{5}{5}=1$ الطرف الايسر

$\frac{5}{6x}=\frac{5}{6\left(\frac{5}{6}\right)}=\frac{5}{5}=1$ الطرف الايمن

الطرفين في الوسطين $[33]\ \frac{Z+4}{Z^2}=\frac{1}{2}$

الحل:

$Z^2=2Z+8 \Rightarrow Z^2-2Z-8=0$

$(Z-4)(Z+2)=0$

أما $Z-4=0 \Rightarrow Z=4$

أو $Z+2=0 \Rightarrow Z=-2$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم Z في المعادلة الأصلية

$Z=4 \Rightarrow \frac{Z+4}{Z^2}=\frac{4+4}{(4)^2}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ الطرف الايمن

2023/2د

$=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{6}$

$y=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

أما $y=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$ أو $y=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

عندما: $y=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

$\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)^2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{6\left(\frac{9+6\sqrt{6}+6}{9}\right)}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2\left(\frac{15+6\sqrt{6}}{3}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2(5+2\sqrt{6})}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{10+4\sqrt{6}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10+4\sqrt{6}}\times\frac{10-4\sqrt{6}}{10-4\sqrt{6}}+\frac{1}{2}$

$=\frac{10-4\sqrt{6}}{100-96}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{6-2\sqrt{6}}{2}=3-\sqrt{6}$ الطرف الايسر

$\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}=\frac{3}{3+\sqrt{6}}\times\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}=\frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6}$

$=\frac{3(3-\sqrt{6})}{3}=3-\sqrt{6}$ الطرف الايمن

سؤال: جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R:

[1] $\frac{2y}{y+2}+\frac{y}{2-y}=\frac{7}{y^2-4}$

الحل:

$\frac{2y}{y+2}-\frac{y}{y-2}=\frac{7}{(y+2)(y-2)}\ \}\times(y+2)(y-2)$

[2] $\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1$

الحل:

$\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1\ \}\times(x-5)(x-2)$

$4(x-2)-3(x-5)=(x-5)(x-2)$

$4x - 8 - 3x + 15 = x^2 - 2x - 5x + 10$

$x + 7 = x^2 - 7x + 10$

$x^2 - 7x + 10 - x - 7 = 0$

$x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow a = 1 \ , \ b = -8 \ , \ c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 4 \pm \sqrt{13}$$

أما $x = 4 + \sqrt{13}$ أو $x = 4 - \sqrt{13}$

$2y(y - 2) - y(y + 2) = 7$

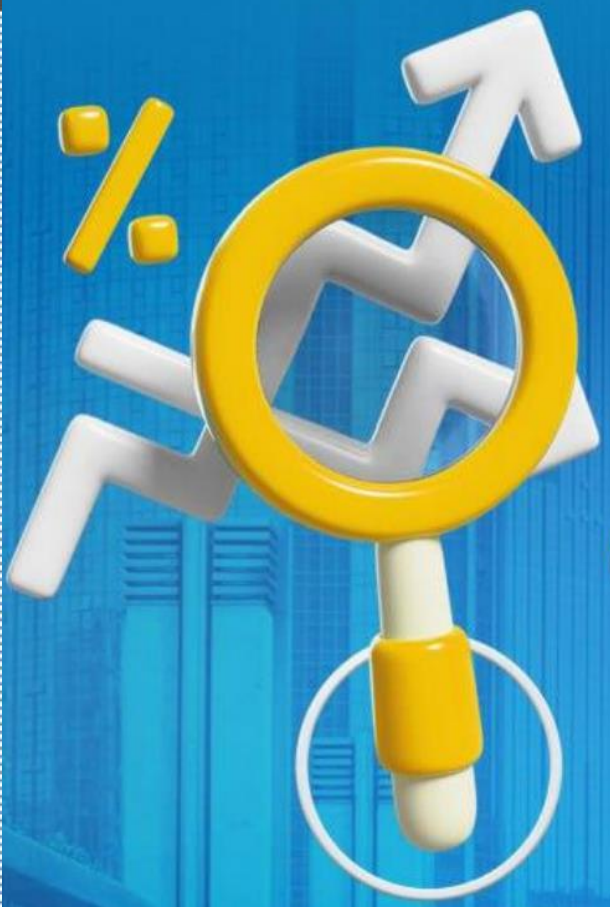
$2y^2 - 4y - y^2 - 2y = 7$

$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow (y - 7)(y + 1) = 0$

أما $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$

أو $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

تم بحمد الله



ملزمة

2026

الرياضيات

mathematics

3 متوسط +

Math

إعداد و ترتيب

الأستاذ رشيد عبد الله اللهيبي

07736957649